

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тульский государственный университет»

Номер государственной регистрации НИР:
УДК 621.983; 539.374

УТВЕРЖДАЮ

Руководитель организации

_____ / _____ /

М.П.

«_____» _____ 2011 г.

ОТЧЕТ

о выполнении научно-исследовательской работы

по теме «Развитие теории пластического формообразования кристаллических ортотропных материалов с деформационной анизотропией механических свойств»
(промежуточный отчет)

Государственный контракт № 14.740.11.0038 от 01 сентября 2010 г.

«Проведение научных исследований коллективами научно-образовательных центров в области создания и обработки кристаллических материалов»,
в рамках
мероприятия 1.1 «Проведение научных исследований коллективами научно-образовательных центров»
федеральной целевой программы
«Научные и научно-педагогические кадры инновационной России»
на 2009-2013 годы»

Руководитель проекта: _____ д.т.н., профессор Яковлев С.С.

г. Тула 2011 г.

Список исполнителей

Научный руководитель, д.т.н., профессор	_____	Яковлев С.С.
Исполнители	подпись, дата	
Проректор по НР д.т.н., профессор	_____	Кухарь В.Д.
профессор, д.ф-м.н., профессор	подпись, дата	
профессор, д.т.н., профессор	_____	Матченко Н.М.
профессор, д.т.н., профессор	подпись, дата	
профессор, д.т.н., профессор	_____	Матченко И.Н.
профессор, д.т.н., профессор	подпись, дата	
профессор, д.т.н., доцент	_____	Панфилов Г.В.
доцент, к.т.н., доцент	подпись, дата	
докторант, к.т.н., доцент	_____	Пасько А.Н.
докторант, к.т.н., доцент	подпись, дата	
доцент, к.т.н.	_____	Коротков В.А.
доцент, к.т.н., доцент	подпись, дата	
доцент, к.т.н.	_____	Черняев А.В.
ассистент, к.т.н.	подпись, дата	
доцент, к.т.н., доцент	_____	Ларин С.Н.
доцент, к.т.н.	подпись, дата	
ассистент, к.т.н.	_____	Ремнев К.С.
доцент, к.т.н., доцент	подпись, дата	
доцент, к.т.н.	_____	Ларина М.В.
доцент, к.т.н.	подпись, дата	
ассистент, к.т.н.	_____	Платонов В.И.
доцент, к.т.н., доцент	подпись, дата	
доцент, к.т.н.	_____	Агеева А.И.
доцент, к.т.н., доцент	подпись, дата	
доцент, к.т.н.	_____	Киреева А.Е.
доцент, к.т.н.	подпись, дата	
доцент, к.т.н.	_____	Крылов Д.В.
доцент, к.т.н.	подпись, дата	
аспирант	_____	Яковлев Б.С.
аспирант	подпись, дата	
аспирант	_____	Пасынков А.А.
аспирант	подпись, дата	
аспирант	_____	Брагин С.А.
аспирант	подпись, дата	
аспирант	_____	Бессмертный А.В.
аспирант	подпись, дата	
аспирант	_____	Перепелкин А.А.
аспирант	подпись, дата	

аспирант	_____	Бессмертная Ю.В.
	подпись, дата	
аспирант	_____	Исаева А.Н.
	подпись, дата	
студент	_____	Леонова Е.В.
	подпись, дата	
студент	_____	Лазо А. А.
	подпись, дата	
студент	_____	Лыков С. С.
	подпись, дата	
Нормоконтролер	_____	Герасимова О.М.
	подпись, дата	

Реферат

Отчет 307 с., 1 ч., 97 рис., 198 источников, 2 прил.

АНИЗОТРОПИЯ, ВЫТЯЖКА, ДЕФОРМАЦИЯ, ДЕФОРМИРУЕМОСТЬ, КИНЕМАТИКА, МЕТОД, ЛОКАЛЬНАЯ ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ, ПОВРЕЖДАЕМОСТЬ, РАЗРУШЕНИЕ, РЕВЕРСИВНАЯ ВЫТЯЖКА, РЕКОМЕНДАЦИЯ, СИЛА, СПЛОШНОСТЬ, МИКРОСТРУКТУРА, ТЕКСТУРА, ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ПРОЦЕСС, НАПРЯЖЕНИЕ, ПОВРЕЖДЕННОСТЬ, МЕТОДИКА, МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА.

Объект исследования: создание высоких наукоемких технологических процессов изготовления полусферических и полуторовых днищ изделий ответственного назначения методами многоступенчатой вытяжки, реверсивной вытяжки листовых заготовок на базе развития теории пластического формообразования кристаллических ортотропных материалов с деформационной анизотропией механических свойств.

Цель работы: научное обоснование и внедрение высоких технологий изготовления корпусных деталей сложной формы (полусферических и полуторовых днищ) ответственного назначения из высокопрочных кристаллических материалов методами пластического формообразования путем повышения пластической деформируемости листовых кристаллических материалов на базе изменения кристаллографической текстуры и характеристик анизотропии механических свойств, путем совершенствования технологий формообразования и термообработки при изготовлении.

Выполнение НИР должно обеспечивать достижение научных результатов мирового уровня, подготовку и закрепление в сфере науки и образования научных и научно-педагогических кадров, формирование эффективных и жизнеспособных научных коллективов.

Полученные результаты:

Разработана теория деформирования анизотропных кристаллических материалов на первой и многоступенчатой операциях вытяжки, реверсивной вытяжки осесимметричных деталей с фланцем с учетом изменения толщины заготовки и упрочнения материала заготовки применительно к изготовлению полусферических и полуторовых днищ. Разработаны экспериментальные основы формирования кристаллографической текстуры и анизотропии механических свойств материалов заготовок для изготовления изделий машиностроения ответственного назначения методами пластического формообразования.

Разработаны математические модели первой и многоступенчатой вытяжек, реверсивной вытяжки осесимметричных деталей с фланцем из трансверсально-изотропных материалов с учетом изменения толщины заготовки и упрочнения материала заготовки в процессе пластической деформации кристаллических материалов применительно к изготовлению полусферических и полуторовых днищ. Созданы алгоритмы расчетов и пакеты прикладных программ.

Установлено влияние анизотропии механических свойств исходных материалов, технологических параметров, геометрических размеров заготовки и инструмента, степени деформации, условий трения контактных поверхностей инструмента и заготовки на кинематику течения материала, напряженное и

деформированное состояния заготовки, силовые режимы и предельные возможности формоизменения и формирование показателей качества изготавливаемых осесимметричных деталей.

Показано влияние кристаллографической текстуры на коэффициент нормальной пластической анизотропии гексагональных плотноупакованных – металлов. Выявлено влияние длительности отжига на текстуру листов из гексагональных плотноупакованных – металлов (титановый сплав ПТ-3Вкт). Установление закономерностей изменения текстуры кристаллических материалов при многопереходной штамповке-вытяжке полусферических днищ. Установлено влияние режимов отжига на глубину газонасыщенного слоя полусферических днищ из титанового сплава ПТ-3Вкт. Выявлено влияние структуры и текстуры листового проката титанового сплава ПТ-3кт на характер разрушения в процессе многооперационной вытяжки. Установлены пути управления текстурой и структурой сварных соединений α -сплавов титана.

По результатам научных исследований опубликованы две монографии, опубликованы и подготовлены к опубликованию 49 научных работ в ведущих научных журналах, рекомендуемых ВАК Российской Федерации; 12 статей в межвузовских сборниках научных трудов, а также опубликовано 3 тезиса докладов в сборниках трудов международных и Всероссийских научно-технических конференций. Проведены патентные исследования. Получено положительное решение заявку на изобретение № 2009128344/02 от 21.07.2009. Многослойная ячеистая конструкция и способ ее изготовления. Авторы: Коротков В.А., Яковлев С.С., Чудин В.Н., Яковлев С.П., Ларин С.Н., Соболев Я.А.

По результатам научно-исследовательской работы защищена одна докторская диссертационная работа и четыре кандидатские диссертационные работы по специальности 05.02.09 – технологии и машины обработки давлением. Подготовлено 8 магистров по направлению «Технологические машины и оборудование», программам подготовки «Теория и технология штамповки анизотропных заготовок», «Высокоскоростные методы обработки металлов давлением» и «Высокоэффективные технологические процессы листовой и объемной штамповки».

Результаты научно-исследовательской работы использованы при модернизации учебных планов подготовки бакалавров техники и технологии направления 150400 «Технологические машины и оборудование» и студентов, обучающихся по направлению 150200 «Машиностроительные технологии и оборудование» специальности 150201 «Машины и технология обработки металлов давлением», а также учебных планов подготовки магистров по направлениям подготовки 150400 «Технологические машины и оборудование» программ подготовки: 15040039 «Теория и технология штамповки анизотропных материалов», 15040041 «Высокоэффективные технологические процессы листовой и объемной штамповки», 15040040 «Высокоскоростные методы обработки металлов давлением». Отдельные результаты исследований использованы при разработке методических указаний по проведению практических занятий по курсу «Теория обработки металлов давлением» в виде новых занятий, при выполнении курсовых работ и дипломных проектов.

При выполнении научно-исследовательской работы привлекались студенты в качестве непосредственных исполнителей НИР. Студентами, привлекаемыми к выполнению НИР, получено 4 Диплома лауреатов Всероссийской научно-технической конференции. На базе кафедры «Механика пластического формоизменения» ГОУ ВПО «Тульский государственный университет» проведена Всероссийская научно-техническая конференция студентов и аспирантов «Современные технологии обработки металлов и средства их автоматизации» (Тула: ТулГУ, 2011 г.).

Исполнителями НИР опубликовано 6 научно-методических статей.

По результатам научных исследований опубликованы два учебных пособия.

Результаты научно-исследовательской работы использованы при подготовке научно-методической работы «Научно-учебно-педагогический комплекс по подготовке кадров высшей квалификации в области инновационных и высоких технологий обработки металлов давлением», за которую в соавторстве д.т.н., проф. Яковлеву С.С., д.т.н., проф. Кухарю В.Д. присвоена премия Правительства Российской Федерации в области образования за 2011 год.

Основные конструктивные и технико-эксплуатационные показатели.

Теоретическое значение результатов работы состоит в развитии теории деформирования листовых заготовок из кристаллических ортотропных материалов с анизотропным упрочнением. Разработана теория деформирования анизотропных кристаллических материалов на первой и многоступенчатой операциях вытяжки, реверсивной вытяжки осесимметричных деталей с фланцем с учетом изменения толщины заготовки и упрочнения материала заготовки применительно к изготовлению полусферических и полуторовых днищ. Разработаны математические модели первой и многоступенчатой вытяжек, реверсивной вытяжки осесимметричных деталей с фланцем из трансверсально-изотропных материалов с учетом изменения толщины заготовки и упрочнения материала заготовки в процессе пластической деформации кристаллических материалов применительно к изготовлению полусферических и полуторовых днищ. Созданы алгоритмы расчетов и пакеты прикладных программ. Установлено влияние анизотропии механических свойств исходных материалов, технологических параметров, геометрических размеров заготовки и инструмента, степени деформации, условий трения контактных поверхностей инструмента и заготовки на кинематику течения материала, напряженное и деформированное состояния заготовки, силовые режимы и предельные возможности формоизменения и формирование показателей качества изготавливаемых осесимметричных деталей.

Разработаны экспериментальные основы формирования кристаллографической текстуры и анизотропии механических свойств материалов заготовок для изготовления изделий машиностроения ответственного назначения методами пластического формообразования.

Разработанная теория деформирования заготовок из кристаллических ортотропных материалов с анизотропным упрочнением расширяет возможности и подходы к анализу процессов пластического формоизменения деталей ответственного назначения. Использование этой теории внесет значительный вклад в ускорение научно-технического прогресса.

Данные теоретические положения будут использованы при создании научного обоснования и внедрении высоких наукоемких технологий изготовления

полусферических и полуторовых днищ ответственного назначения из высокопрочных кристаллических материалов методами пластического формообразования (многооперационной вытяжки, реверсивной вытяжки, ротационной вытяжки) путем повышения пластической деформируемости кристаллических ортотропных материалов на базе изменения кристаллографической текстуры и характеристик анизотропии механических свойств, путем совершенствования технологий формообразования и термообработки при изготовлении. Проведенный обзор зарубежной и отечественной литературы показал отсутствие аналогичного направления исследований. Теоретический уровень полученных результатов сопоставим с мировым, а по ряду позиций опережает аналогичные зарубежные разработки в данной области науки.

Научные результаты, полученные на базе разработанной теории деформирования заготовок из кристаллических ортотропных материалов с анизотропным упрочнением, являются оригинальными и отличаются от известных работ комплексной постановкой задач исследований в данной области науки применительно к изготовлению тонкостенных полусферических и торовых днищ ракетно-космической техники: учетом анизотропии механических свойств материала заготовки; отказом от гипотезы постоянства толщины стенки вдоль дуги окружности оболочки, разработкой принципиально новых математических моделей первой и многоступенчатой вытяжек, реверсивной вытяжки осесимметричных деталей с фланцем из трансверсально-изотропных материалов с учетом изменения толщины заготовки и упрочнения материала в процессе пластической деформации кристаллических материалов.

Разработанные комплексы технологий и научное обеспечение производственных процессов пластического формообразования высокопрочных анизотропных материалов позволят повысить удельную прочность деталей на 20...30 %; снизить массу деталей и узлов на 20...25 %; увеличить коэффициент использования материала с 0,4 до 0,8, а сроки подготовки производства и трудоемкость изготовления изделий сократить в 1,5...2 раза. Получен патент на изобретение. Подана заявка на изобретение.

Результаты работы будут иметь государственное значение и внесут значительный вклад в экономику страны и повышение ее обороноспособности. Новые технологические процессы могут быть использованы на предприятиях ракетно-космического комплекса (при изготовлении гаммы разгонных блоков типа «ДМ», при модернизации конструкций космических кораблей «СОЮЗ» и «ПРОГРЕСС»), оборонной промышленности, самолетостроения, судостроения, приборостроения, строительства, энергетики, например, при изготовлении корпусов отсеков крылатых летательных аппаратов («Развитие оборонно-промышленного комплекса Российской Федерации на 2007-2010 годы и на период до 2015 года», Федеральное агентство по промышленности) и емкостей топлива, крыльев летательных аппаратов («Ориентированные фундаментальные исследования, связанные с созданием и использованием новых наукоемких космических технологий», Федеральное космическое агентство) и скоростных судов, головных обтекателей ракет, а также на предприятиях, изготавливающих товары народного потребления, например, форм для конфет и т.д. Особый интерес будут представлять предложенные технологические процессы при создании космических кораблей нового поколения: «Клипер», «Паром», «Буксир», развитии МКС и др.

Технологические процессы имеют двойное назначение.

Результаты планируемых научно-исследовательских работ могут быть использованы при выполнении прикладных НИР по широкому внедрению результатов исследований для производства деталей и узлов оборонной техники и летательных аппаратов, судостроения, транспортного машиностроения, а также товаров народного потребления. Результаты НИР могут быть востребованы ФГУП «ГНПП «Сплав» (г. Тула); ФГУП «ГНПП «ТЕХНОМАШ» (г. Москва); ЗАО «Завод экспериментального машиностроения ракетно-космической корпорации «Энергия» имени С.П. Королева» (г. Королев Московской обл.); ОАО «Корпорация «Тактическое ракетное вооружение» (г. Королев Московской обл.); ФГУП «НПО машиностроения» (г. Реутов Московской обл.); ФГУП «Научно-производственное объединение имени С.А. Лавочкина» (г. Химки Московской обл.); ГНП РКЦ «ЦСКБ - Прогресс» (г. Самара); ФГУП «ГНПП Красноярский машиностроительный завод» и т.д.

Отдельные результаты исследований будут использованы в учебном процессе в курсах «Новые технологические процессы и оборудование» и «Механика процессов пластического формоизменения», «Теория обработки металлов давлением», «Производство технологического оборудования», «Горячая штамповка», «Новые виды горячей и холодной объемной штамповки», «Нагрев и нагревательные устройства» для бакалавров техники и технологии направления 150400 «Технологические машины и оборудование» и студентов, обучающихся по направлению 150200 «Машиностроительные технологии и оборудование» специальности 150201 «Машины и технология обработки металлов давлением», при выполнении курсовых работ и дипломных проектов.

Содержание

Введение	13
1 Основные соотношения пластического деформирования анизотропных кристаллических материалов	14
1.1 Условие текучести и ассоциированный закон пластического течения.....	14
1.2 Плоское напряженное состояние анизотропного материала.....	15
1.3 Плоское деформированное состояние анизотропного материала.....	18
1.4 Математическая модель упрочнения анизотропного материала.....	19
1.5 Феноменологические модели разрушения анизотропного материала.....	20
1.6 Критерии локальной потери устойчивости листовых заготовок из анизотропных материалов.....	23
1.7 Устойчивость трубной заготовки из анизотропного материала в пластической области в виде образования складок.....	26
1.7.1 Основные соотношения и предположения.....	27
1.7.2 Условие устойчивости цилиндрической заготовки.....	29
1.7.3 Обсуждение результатов расчетов.....	33
2 Теоретические исследования первой операции вытяжки осесимметричных деталей из кристаллических анизотропных материалов	38
2.1 Математическая модель первой операции вытяжки в радиальной матрице осесимметричных деталей.....	38
2.2 Установление влияния анизотропии механических свойств исходных материалов, технологических параметров на силовые режимы, предельные возможности формоизменения и формирование показателей качества изготавливаемых осесимметричных деталей.....	45
2.2.1 Силовые режимы первой операции вытяжки.....	45
2.2.2 Влияние анизотропии механических свойств на силовые режимы....	49
2.2.3 Предельные возможности формоизменения.....	50
2.2.4 Влияние анизотропии механических свойств на предельные возможности формоизменения.....	55
3 Теоретические исследования последующих операций вытяжки ступенчатых осесимметричных деталей из кристаллических анизотропных материалов	57
3.1 Математическая модель многооперационной вытяжки ступенчатых осесимметричных деталей из кристаллических анизотропных материалов.....	58

3.2	Установление влияния анизотропии механических свойств исходных материалов, технологических параметров на силовые режимы, предельные возможности формоизменения и формирование показателей качества изготавливаемых осесимметричных деталей.....	64
3.2.1	Напряжения и сила.....	64
3.2.2	Предельные возможности формоизменения.....	67
3.2.3	Влияние анизотропии механических свойств на предельные возможности формоизменения.....	73
4	Экспериментальные исследования силовых режимов вытяжки ступенчатых осесимметричных деталей из кристаллических анизотропных материалов.....	76
5	Теоретические исследования операции реверсивной вытяжки осесимметричных деталей с фланцем из анизотропных материалов.....	78
5.1	Математическая модель реверсивной вытяжки осесимметричных деталей с фланцем из кристаллических анизотропных материалов.....	78
5.2	Установление влияния анизотропии механических свойств исходных материалов, технологических параметров на силовые режимы, предельные возможности формоизменения и формирование показателей качества изготавливаемых осесимметричных деталей.....	84
5.2.1	Напряженное состояние. Силовые режимы.....	84
5.2.2	Влияние анизотропии механических свойств заготовки на силовые режимы.....	89
5.2.3	Оценка повреждаемости материала осесимметричных деталей при реверсивной вытяжке.....	90
5.2.4	Предельные возможности формоизменения.....	92
5.2.5	Влияние анизотропии механических свойств заготовки на предельные возможности формообразования.....	96
5.2.6	Относительная величина разностенности изготавливаемых деталей..	97
5.2.7	Влияние анизотропии механических свойств на относительную величину разностенности изготавливаемых деталей.....	100
6	Экспериментальные исследования силовых режимов операции реверсивной вытяжки осесимметричных деталей с фланцем.....	102
7	Разработка экспериментальных основ формирования кристаллографической текстуры и анизотропии механических свойств материалов заготовок для изготовления изделий машиностроения ответственного назначения методами пластического формообразования.....	104

7.1	Установление влияния кристаллографической текстуры на коэффициент нормальной пластической анизотропии гексагональных плотноупакованных – металлов.....	104
7.2	Влияние длительности отжига на текстуру листов из сплава ПТ – 3Вкт.....	113
7.3	Исследование изменений текстуры многопереходной штамповки-вытяжки полусферических днищ из листов титанового сплава ПТ – 3Вкт.....	115
7.4	Взаимосвязь характеристик разрушения полуфабриката в процессе многооперационной вытяжки со структурой и текстурой титанового сплава ПТ-3Вкт.....	122
7.5	Исследование влияния режимов отжига на глубину газонасыщенного слоя полусферических днищ из титанового сплава ПТ-3Вкт.....	127
8.	Использование результатов научно-исследовательской работы в учебном процессе.....	130
9.	Сведения о выполнении целевых индикаторов и показателей федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы».....	132
9.1.	Список монографий, опубликованных в 2011 г.....	132
9.2.	Список учебных пособий, опубликованных в 2011 г.....	132
9.3.	Список научно-методических статей, опубликованных в 2011 г.....	132
9.4.	Список статей, опубликованных в ведущих научных журналах в 2011 г.....	133
9.5.	Список статей, опубликованных в межвузовских сборниках научных трудов в 2011 г.....	139
9.6.	Список тезисов докладов, опубликованных в 2011 г.....	141
9.7.	Список, поданных заявок на изобретение в 2011 г.....	141
9.8.	Список защит докторских диссертаций в 2011 г.....	141
9.9.	Список защит кандидатских диссертаций в 2011 г.....	142
9.10.	Признание заслуг коллектива.....	142
	Заключение.....	144
	СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	151
	ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Методические указания по проведению практических занятий по курсу «Теория обработки металлов давлением» в виде новых занятий.....	170
	ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Текст программы.....	286

Введение

Важной проблемой, стоящей перед современным машиностроением, является повышение эффективности и конкурентоспособности процессов изготовления изделий из металлов и сплавов методами обработки давлением, обеспечивающими необходимые эксплуатационные характеристики. Это актуально и для ракетно-космической техники, и для других отраслей промышленности.

Типовыми конструкциями изделий этих производств являются корпусные оболочки из листовых заготовок (оболочки емкостей, корпусные детали, сосуды высокого давления, днища баков, полуторы и т.д.). Эти конструкции требуют применения высокопрочных материалов, но трудоемких в обработке. К таким материалам относятся специальные титановые и высокопрочные алюминиевые сплавы. Для изготовления тонкостенных днищ баков и полуторов обычно используют многооперационную ступенчатую вытяжку в сочетании с реверсивной вытяжкой.

Качество обработки влияет на тактико-технические характеристики изделий и их надежность. Трудоемкость производства в настоящее время велика и составляет 70...80 % общей трудоемкости изделия. При этом требуется парк оборудования различного назначения: прессования, сварки, электроэрозионной и механической обработки, сборки стapelей и др.

Методы технологической обработки на базе резания, сварки, соединения клепкой, сваркой, пайкой не всегда обеспечивают требуемый уровень качества, которое определяется удельной прочностью изделий, точностью геометрии форм, герметичностью, коррозионной стойкостью, уровнем повреждаемости материала на стадиях обработки. При этом не маловажны расход основных материалов и трудоемкость производства.

В различных отраслях машиностроения, в частности наземном оборудовании ракетно-космической техники, широкое распространение нашли толстостенные осесимметричные детали, имеющие внутренние полости, изготавливаемые вытяжкой и вытяжкой с утонением стенки из листовых заготовок, а также операцией обратного выдавливания трубных заготовок.

Прокат, используемый для процессов холодного деформирования, как правило, обладает анизотропией механических свойств, которая зависит от физико-химического состава сплава, технологии его получения и температуры обработки. Анизотропия механических свойств заготовки оказывает существенное влияние на силовые, деформационные параметры процессов обработки металлов давлением, на качество получаемых изделий.

Технологические режимы пластического деформирования определяют степень формообразования, влияют на устойчивость деформаций, развитие несплошности материала и возможное разрушение. Они формируют качество изделий, что связано с анизотропией механических свойств, упрочнением материала, локальной потерей устойчивости заготовки и т.д. В этой связи научное обоснование технологических решений изготовления крупногабаритных осесимметричных деталей ответственного назначения методами пластического формоизменения на основе развития теории деформирования листовых и трубных заготовок, учитывающих анизотропию механических свойств, упрочнение материала заготовки, термомеханические режимы формоизменения и другие особенности процессов обработки металлов давлением, является крупной научно-технической проблемой большого народно-хозяйственного значения.

Цель выполнения научно-исследовательской работы - научное обоснование и внедрение высоких технологий изготовления корпусных деталей сложной формы (полусферических и полоторовых днищ) ответственного назначения из высокопрочных кристаллических материалов методами пластического формообразования путем повышения пластической деформируемости листовых кристаллических материалов на базе изменения кристаллографической текстуры и характеристик анизотропии механических свойств, путем совершенствования технологий формообразования и термообработки при изготовлении. Подготовка научных кадров для машиностроительных предприятий и научно-исследовательских учреждений центрального региона и научно-педагогических кадров для высших учебных заведений, формирование эффективных и жизнеспособных научных коллективов.

1 ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Листовой металл, используемый для процессов обработки металлов давлением, как правило, обладает анизотропией механических свойств, которая зависит от физико-химического состава сплава, технологии его получения и температуры обработки. Анизотропия механических свойств заготовки проявляется при пластическом деформировании и оказывает существенное влияние на силовые, деформационные параметры процессов обработки металлов давлением, на качество получаемых изделий [3, 25, 32, 48, 71, 78, 88, 159, 168, 173, 175].

1.1 Условие текучести и ассоциированный закон пластического течения ортотропного материала

Материал принимаем несжимаемым, жесткопластическим, ортотропным, для которого справедливы условие текучести Мизеса-Хилла [159]

$$2f(\sigma_{ij}) \equiv F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2L\tau_{yz}^2 + 2M\tau_{zx}^2 + 2N\tau_{xy}^2 = 1 \quad (1.1)$$

и ассоциированный закон пластического течения

$$\begin{aligned} d\varepsilon_x &= d\lambda[H(\sigma_x - \sigma_y) + G(\sigma_x - \sigma_z)]; & d\gamma_{yz} &= d\lambda L\tau_{yz}; \\ d\varepsilon_y &= d\lambda[F(\sigma_y - \sigma_z) + H(\sigma_y - \sigma_x)]; & d\gamma_{zx} &= d\lambda M\tau_{zx}; \\ d\varepsilon_z &= d\lambda[G(\sigma_z - \sigma_x) + F(\sigma_z - \sigma_y)]; & d\gamma_{xy} &= d\lambda N\tau_{xy}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где F , G , H , L , M , N - параметры, характеризующие текущее состояние анизотропии; σ_{ij} - компоненты тензора напряжений в главных осях анизотропии;

$d\varepsilon_x$, $d\varepsilon_y$, $d\varepsilon_z$, $d\gamma_{yz}$, $d\gamma_{xy}$ и $d\gamma_{zx}$ - компоненты приращения тензора деформаций;

$d\lambda$ - коэффициент пропорциональности. Здесь x , y , z - главные оси анизотропии.

Параметры анизотропии F , G , H , L , M , N связаны с величинами сопротивления материала пластическому деформированию следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
2F &= \frac{1}{\sigma_{sy}^2} + \frac{1}{\sigma_{sz}^2} - \frac{1}{\sigma_{sx}^2}; & 2L &= \frac{1}{\tau_{syz}^2}; \\
2G &= \frac{1}{\sigma_{sz}^2} + \frac{1}{\sigma_{sx}^2} - \frac{1}{\sigma_{sy}^2}; & 2M &= \frac{1}{\tau_{szx}^2}; \\
2H &= \frac{1}{\sigma_{sx}^2} + \frac{1}{\sigma_{sy}^2} - \frac{1}{\sigma_{sz}^2}; & 2N &= \frac{1}{\tau_{sxy}^2},
\end{aligned} \tag{1.3}$$

где σ_{sx} , σ_{sy} и σ_{sz} - величины сопротивления материала пластическому деформированию при растяжении в главных осях анизотропии; τ_{sxy} , τ_{syz} , τ_{szx} - величины сопротивления материала пластическому деформированию при сдвиге по отношению к главным осям анизотропии.

В случае изотропно-упрочняющегося анизотропного тела Р.Хиллом введены понятия интенсивности напряжений [159]

$$\begin{aligned}
\sigma_i &= \sqrt{3/[2(F+G+H)]} \left[F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + \right. \\
&\quad \left. + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2L\tau_{yz}^2 + 2M\tau_{zx}^2 + 2N\tau_{xy}^2 \right]^{1/2}
\end{aligned} \tag{1.4}$$

и приращения интенсивности деформации

$$\begin{aligned}
d\varepsilon_i &= \sqrt{\frac{2}{3}(F+G+H)} \left[F \left(\frac{Gd\varepsilon_y - Hd\varepsilon_z}{FG+GH+HF} \right)^2 + G \left(\frac{Hd\varepsilon_z - Fd\varepsilon_x}{FG+GH+HF} \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + H \left(\frac{Fd\varepsilon_x - Gd\varepsilon_y}{FG+GH+HF} \right)^2 + \frac{2d\gamma_{yz}^2}{L} + \frac{2d\gamma_{zx}^2}{M} + \frac{2d\gamma_{xy}^2}{N} \right]^{1/2}.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

1.2 Плоское напряженное состояние анизотропного материала

Ряд процессов обработки металлов давлением, таких как вытяжка, обжим, раздача и другие, протекают в условиях плоского напряженного состояния листовой заготовки [1, 59, 126, 147, 175]. Теоретические исследования напряженного и деформированного состояний заготовки, силовых режимов этих процессов выполняются на основе уравнений плоского напряженного состояния.

Для плоского напряженного состояния ($\sigma_z = 0$; $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$) условие текучести (1.1) записывается в виде

$$(G + H)\sigma_x^2 - 2H\sigma_x\sigma_y + (H + F)\sigma_y^2 + 2N\tau_{xy}^2 = 1. \quad (1.6)$$

Кроме указанных выше характеристик анизотропии F , G , H и N , анизотропию механических свойств листовых материалов оценивают коэффициентом анизотропии R_φ , который представляет собой отношение логарифмических деформаций по ширине и толщине образца, вырезанного под углом φ к направлению прокатки при испытании его на растяжение:

$$R_\varphi = \varepsilon_b / \varepsilon_z, \quad (1.7)$$

где ε_b - логарифмическая деформация по ширине; ε_z - логарифмическая деформация по толщине.

Коэффициенты анизотропии R_φ связаны с параметрами анизотропии соотношением [175]

$$R_\varphi = \frac{\frac{H}{F} + \left(2\frac{N}{F} - 1 - \frac{G}{F} - 4\frac{H}{F}\right)\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi + \frac{G}{F}\cos^2\varphi}. \quad (1.8)$$

Выражение (1.8) позволяет определять коэффициент анизотропии в любом направлении листа относительно направления прокатки в зависимости от отношения параметров анизотропии H/F , N/F и G/F .

Величины сопротивления материала пластическому деформированию $\sigma_{s\varphi}$ в различных направлениях φ по отношению к направлению прокатки x в плоскости листа могут быть рассчитаны по выражению:

$$\sigma_{s\varphi}^2 = \sigma_{s90}^2 (1 + H/F) \left/ \left[\sin^2\varphi + \frac{G}{F}\cos^2\varphi + \frac{H}{F} + \left(2\frac{N}{F} - 1 - \frac{G}{F} - 4\frac{H}{F}\right)\sin^2\varphi\cos^2\varphi \right] \right., \quad (1.9)$$

где σ_{s90} - сопротивление материала пластическому деформированию при растяжении образца, вырезанного в направлении, перпендикулярном направлению прокатки.

Отношения параметров анизотропии обычно определяются на основе измерений деформаций образцов, вырезанных в различных направлениях относительно направления прокатки, при их испытании на растяжение по зависимостям:

$$\frac{H}{F} = R_{90}; \quad \frac{G}{F} = \frac{R_{90}}{R_0}; \quad \frac{N}{F} = \left(R_{45} + \frac{1}{2} \right) \left(1 + \frac{R_{90}}{R_0} \right). \quad (1.10)$$

Определив коэффициенты анизотропии в направлениях 0, 45 и 90° к направлению прокатки и параметр анизотропии F по выражению

$$F = \frac{1}{\sigma_{s90}^2 \left(1 + \frac{H}{F} \right)}, \quad (1.11)$$

можно найти остальные параметры анизотропии.

Часто анизотропию в плоскости листа оценивают средним значением R , вычисленным по формулам:

$$R = \frac{R_0 + R_{90} + R_{45}}{3}; \quad R = \frac{R_0 + R_{90} + 2R_{45}}{4}. \quad (1.12)$$

Преобразуя условие текучести (1.6) к главным осям напряжений, получим [175]

$$A_0 \sigma_1^2 + 2B_0 \sigma_1 \sigma_3 + C_0 \sigma_3^2 - 1 = 0, \quad (1.13)$$

где $A_0 = F \sin^2 \varphi + G \cos^2 \varphi + H + (2N - F - G - 4H) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi;$

$$B_0 = -[H + (2N - F - G - 4H)] \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi;$$

$$C_0 = F \cos^2 \varphi + G \sin^2 \varphi + H + (2N - F - G - 4H) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi;$$

φ - угол между главным направлением напряжения σ_1 и осью анизотропии x .

Для трансверсально-изотропного тела в главных напряжениях условие текучести примет вид:

$$\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \frac{2R}{1+R} \sigma_1 \sigma_3 = \sigma_s^2. \quad (1.14)$$

1.3 Плоское деформированное состояние анизотропного тела

Теоретические исследования таких процессов обработки металлов давлением, как прокатка листов, осадка призматических заготовок с большим отношением длины к ширине, вытяжка с утонением, волочение и выдавливание полых осесимметричных деталей и труб с большим отношением диаметра к толщине, проводятся на основе уравнений плоского деформированного состояния [126, 147].

Пусть координатные оси x , y , z совпадают с главными осями анизотропии.

Выбираем такое состояние плоской деформации, чтобы главная ось анизотропии y была нормальна к плоскости течения. В этом случае деформация вдоль оси y отсутствует, т.е.

$$d\varepsilon_y = 0. \quad (1.15)$$

С учетом зависимостей между напряжениями и приращениями деформаций (1.2), отнесенных к главным осям анизотропии, и условия (1.15) найдем

$$\sigma_y = \frac{H\sigma_x + F\sigma_z}{H + F}. \quad (1.16)$$

Подставляя значение σ_y из (1.16) в условие текучести для анизотропного тела (1.1) и принимая во внимание, что для рассматриваемого случая $\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$, получим

$$\frac{FG + GH + FH}{H + F} (\sigma_x - \sigma_z)^2 + 2M \tau_{xz}^2 = 1. \quad (1.17)$$

Введя обозначения c и τ_{sxz} [159]:

$$c = 1 - \frac{M(F + H)}{2(FG + GH + HF)}; \quad (1.18)$$

$$\tau_{sxz}^2 = \frac{1}{2M}, \quad (1.19)$$

условие текучести (1.17) приводится к виду

$$(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4(1 - c)\tau_{xz}^2 = 4\tau_{sxz}^2(1 - c), \quad (1.20)$$

где τ_{sxz} - сопротивление материала пластическому деформированию при сдвиге по отношению к осям x и z ; c - характеристика анизотропии тела в условиях плоской деформации; $-\infty < c < 1$.

Для материала изотропного и трансверсально-изотропного $c = 0$.

Условие текучести (1.20) для плоского деформированного состояния в главных осях напряжений имеет вид:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_{sxz} \sqrt{\frac{1-c}{1-c \sin^2 2\varphi}}, \quad (1.21)$$

где φ - угол между первым главным направлением напряжения σ_1 и осью анизотропии x .

Обозначив

$$\gamma_{II}(\varphi) = \sqrt{\frac{1-c}{1-c \sin^2 2\varphi}},$$

условие текучести (1.21) переписывается следующим образом:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_{sxz} \gamma_{II}(\varphi). \quad (1.22)$$

Характеристиками анизотропии при плоском деформированном состоянии являются сопротивление материала пластическому деформированию τ_{sxz} при сдвиге и величина “ c ”.

Для изотропного неупрочняющегося тела $c = 0$, $\tau_{sxz} = k$,

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2k, \quad (1.23)$$

где k - пластическая постоянная материала.

1.4 Математическая модель упрочнения анизотропного материала

Изотропное упрочнение - простейшая модель упрочняющегося тела. Она реализуется в предположении, что поверхность нагружения расширяется подобно начальной поверхности текучести. В этом случае пределы текучести растут пропорционально одному параметру упрочнения, и состояние анизотропии механических свойств исходной заготовки не изменяется:

$$\sigma_i = \sigma_{i0} + A(\varepsilon_i)^n, \quad (1.24)$$

где $\sigma_{i0}, A, \varepsilon_i, n$ - экспериментальные константы материалов.

Эта модель упрочнения не позволяет оценить изменение анизотропии механических свойств материалов заготовок в процессах пластического деформирования, но значительно облегчает теоретические исследования процессов обработки металлов давлением.

Для более детального анализа процессов обработки металлов давлением необходимо использовать математическую модель анизотропного упрочнения ортотропного материала, которая позволяет оценить изменение анизотропии механических свойств материалов заготовок в процессах пластического деформирования [83, 175].

1.5 Феноменологические модели разрушения анизотропного материала

Предельные возможности формоизменения при пластическом деформировании часто оцениваются на базе феноменологических моделей разрушения. В основу этих моделей положен принцип накопления повреждаемости материала при деформировании. Наибольшее распространение получили деформационные и энергетические критерии разрушения, а в качестве характеристики повреждаемости материала обычно принимается степень использования ресурса пластичности, представляющая собой отношение накопленной интенсивности деформации или удельной (пластической) работы деформации к их предельным величинам при заданных характеристиках напряженного и деформированного состояний элементарного объема в очаге пластической деформации.

Предельные значение интенсивности деформаций и удельной работы разрушения определяются из диаграммы пластичности, полученной экспериментальным путем на основе испытаний материала в различных условиях деформирования. При теоретическом анализе процессов ОМД оценивается

напряженное и деформированное состояния выделенного элемента очага деформации в процессе его формообразования, определяется повреждаемость материала заготовки на каждом этапе деформирования. В дальнейшем находится накопленная повреждаемость в процессе деформирования путем линейного или нелинейного принципа накопления повреждений. Предельные возможности деформирования определяются при достижении величины накопленной повреждаемости в процессе формоизменения, равной 1 или меньшего значения, в зависимости от условий эксплуатации получаемого изделия.

В настоящее время феноменологические модели разрушения изотропного материала при пластическом деформировании развиты в работах В.Л. Колмогорова, А.А. Богатова, Л.Г. Степанского, Г.Д. Деля, В.А. Огородникова, Б.А. Мигачева и др. [10, 11, 36, 62-64, 87, 146, 175].

В этих исследованиях показано, что при пластическом формоизменении величина интенсивности деформации в момент разрушения $\varepsilon_{ii\delta}$ и удельная пластическая работа разрушения A_{np} существенно зависят от показателя напряженного состояния σ/σ_i и параметра вида напряженного состояния Лоде-Надаи μ_σ .

Здесь $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$ - среднее напряжение; σ_1, σ_2 и σ_3 - главные напряжения; σ_i - интенсивность напряжения; $\mu_\sigma = (2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3)/(\sigma_3 - \sigma_1)$ - параметр вида напряженного состояния Лоде-Надаи.

Ниже предложен деформационный критерий разрушения анизотропного материала при пластическом формоизменении.

Предлагается условие деформируемости связывать со степенью использования ресурса пластичности:

$$\omega_e = \int_0^{\varepsilon_i} \frac{d\varepsilon_i}{\varepsilon_{i_{np}} (1 - \omega_e)^k} < 1. \quad (1.26)$$

Здесь ω_e - повреждаемость материала при пластическом формоизменении по деформационной модели разрушения, k - константа материала,

$\varepsilon_{inp} = \varepsilon_{inp}(\sigma/\sigma_i, \alpha, \beta, \gamma)$; σ_i - интенсивность напряжения; α, β, γ - углы между первой главной осью напряжений и главными осями анизотропии x, y и z .

В последнем соотношении учитывается ускорение процесса повреждаемости под влиянием уже накопленных в материале повреждений. Интегрирование в выражении (1.26) ведется вдоль траектории рассматриваемых элементарных объемов. Отметим, что до деформации (при $t=t_0$) $\omega_e = 0$, а в момент разрушения (при $t=t_p$) $\omega_e = 1$.

При $k=0$ получим деформационный критерий разрушения, предложенный В.А. Колмогоровым [62-64]:

$$\omega_e = \int_0^{\varepsilon_i} \frac{d\varepsilon_i}{\varepsilon_{inp}} < 1. \quad (1.27)$$

Если, кроме того, при нагружении показатель напряженного состояния σ/σ_i и параметр Лоде μ_σ не изменяются, то имеем

$$\varepsilon_i \leq \varepsilon_{inp}. \quad (1.28)$$

Величина предельной интенсивности деформации находится по выражению

$$\varepsilon_{inp} = \Omega \exp\left(U \frac{\sigma}{\sigma_i}\right) (a_0 + a_1 \cos \alpha + a_2 \cos \beta + a_3 \cos \gamma), \quad (1.29)$$

где Ω, U - константы материала, определяемые в зависимости от рода материала согласно работам В.Л. Колмогорова и А.А. Богатова [10, 11, 62-64]; a_0, a_1, a_2 и a_3 - константы материала, зависящие от анизотропии механических свойств материала заготовки и определяемые из опытов на растяжение образцов в условиях плоского напряженного и плоского деформированного состояний.

В зависимости от условий эксплуатации или последующей обработки изготавливаемого изделия уровень повреждаемости не должен превышать величины χ , т.е.

$$\omega_e \leq \chi. \quad (1.30)$$

При назначении величин степеней деформации в процессах пластического формоизменения в дальнейшем учитывались рекомендации по степени

использования запаса пластичности В.Л. Колмогорова и А.А. Богатова [10, 11, 62-64], согласно которым для ответственных деталей, работающих в тяжелых условиях эксплуатации, и заготовок, подвергающихся после штамповки термической обработке (отжигу или закалке), допустимой величиной степени использования запаса пластичности следует считать $\chi=0,25$, а только для неответственных деталей допустимая степень использования запаса пластичности может быть принята $\chi=0,65$.

1.6 Критерии локальной потери устойчивости листовых заготовок из анизотропных материалов

Методы оценки деформируемости заготовки, т.е. способности к той или иной технологической операции без разрушения, приобретают важное значение в связи с повышением требований к качеству продукции, рациональному использованию материала заготовки, назначению степеней деформации на каждой операции с целью повышения надежности и уменьшения их количества. Расчетная оценка деформируемости на стадии проектирования технологических процессов способствует его интенсификации и позволяет предотвратить брак от разрушения материала в процессе обработки давлением, порчи внешнего вида изделия, отклонений от технических требований. Пластическое деформирование материалов осуществляется различными методами в условиях сложного напряженного и деформированного состояний с различным характером нагружения. Условия деформирования и свойства материала накладывают свои особенности на характер разрушения и предельные возможности деформирования.

Многие операции листовой штамповки (вытяжка без утонения стенки, обжим, раздача, отбортовка, формовка) осуществляются в условиях, близких к плоскому напряженному состоянию. Для них в случае высоких пластических свойств материала заготовок разрушение или порча внешнего вида изделия связано с локальной потерей устойчивости заготовки - местным утонением заготовки

(шейкообразование, первичные и вторичные полосы скольжения) или образованием складок [25, 36, 71, 72].

Устойчивость формообразования листового металла - одно из основных условий получения штампованных изделий хорошего качества. При выполнении ряда технологических операций обработки металлов давлением, особенно в случае пластического формообразования тонкостенных оболочек и листовых заготовок, при достижении некоторой критической деформации процесс пластического деформирования становится неустойчивым. Превышение этой деформации приводит к потере устойчивости пластического формоизменения, ухудшению качества и разрушению материала заготовки [25, 36, 71, 72]. В этом случае для деталей ответственного назначения предельные возможности формоизменения ограничиваются критерием локальной потери устойчивости заготовки.

Приведем критерий локальной потери устойчивости ортотропного анизотропного упрочняющегося материала, полученный на основе критерия положительности добавочных нагрузок [83], для плоского напряженного состояния заготовки:

$$\frac{1}{z} = \frac{d\sigma_i}{\sigma_i d\varepsilon_i} > \frac{1}{2} \frac{\frac{da_x}{d\varepsilon_i} - 2\frac{da_{xy}}{d\varepsilon_i}m + \frac{da_y}{d\varepsilon_i}m^2 - 2a_{xy}\frac{dm}{d\varepsilon_i} + 2ma_y\frac{dm}{d\varepsilon_i}}{a_x - 2a_{xy}m + a_y m^2} + \frac{a_x - a_{xy}m}{\sqrt{a_x - 2a_{xy}m + a_y m^2}}; \quad (1.31)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{d\sigma_i}{\sigma_i d\varepsilon_i} > \frac{1}{2} \frac{m\left(m^2\frac{da_y}{d\varepsilon_i} - 2m\frac{da_{xy}}{d\varepsilon_i} + \frac{da_x}{d\varepsilon_i}\right) + 2a_{xy}m\frac{dm}{d\varepsilon_i} - 2a_x\frac{dm}{d\varepsilon_i}}{m(m^2a_y - 2a_{xy}m + a_x)} + \frac{a_y m - a_{xy}}{\sqrt{a_x - 2a_{xy}m + a_y m^2}}, \quad (1.32)$$

где
$$m = \frac{\sigma_y}{\sigma_x}; \quad \frac{G}{F} = \frac{R_y}{R_x}; \quad \frac{H}{F} = R_y; \quad \frac{3R_y(R_x + 1)}{2(R_x + R_y + R_x R_y)} = a_x;$$

$$\frac{3(R_y + 1)R_x}{2(R_x + R_y + R_x R_y)} = a_y; \quad \frac{3R_y R_x}{2(R_x + R_y + R_x R_y)} = a_{xy};$$

$\sigma_i = \sigma_x \sqrt{a_x - 2a_{xy}m + a_y m^2}$; σ_x, σ_y - напряжения, совпадающие с главными осями анизотропии x, y ; $\sigma_z = 0$.

При простом нагружении $\frac{dm}{d\varepsilon_i} = 0$ эти неравенства упрощаются и принимают

следующий вид:

$$\frac{1}{z} = \frac{d\sigma_i}{\sigma_i d\varepsilon_i} > \frac{1}{2} \frac{\frac{da_x}{d\varepsilon_i} - 2\frac{da_{xy}}{d\varepsilon_i}m + \frac{da_y}{d\varepsilon_i}m^2}{a_x - 2a_{xy}m + a_y m^2} + \frac{a_x - a_{xy}m}{\sqrt{a_x - 2a_{xy}m + a_y m^2}}; \quad (1.33)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{d\sigma_i}{\sigma_i d\varepsilon_i} > \frac{1}{2} \frac{m^2 \frac{da_y}{d\varepsilon_i} - 2m \frac{da_{xy}}{d\varepsilon_i} + \frac{da_x}{d\varepsilon_i}}{m^2 a_y - 2a_{xy}m + a_x} + \frac{a_y m - a_{xy}}{\sqrt{a_x - 2a_{xy}m + a_y m^2}}. \quad (1.34)$$

Если материал изотропно упрочняется, то параметры a_x, a_y, a_{xy} будут постоянными величинами в процессе пластического деформирования, и следовательно, будем иметь

$$\frac{1}{z} = \frac{d\sigma_i}{\sigma_i d\varepsilon_i} > \frac{a_x - a_{xy}m}{\sqrt{a_x - 2a_{xy}m + a_y m^2}}; \quad \frac{1}{z} = \frac{d\sigma_i}{\sigma_i d\varepsilon_i} > \frac{a_y m - a_{xy}}{\sqrt{a_x - 2a_{xy}m + a_y m^2}}. \quad (1.35)$$

Выражения (1.35) совпадают с условиями, полученными Н.Н. Малининым и В.Д. Головлевым [25, 71, 72].

Критической является наименьшая из деформаций $\int d\varepsilon_i$, удовлетворяющих условиям (1.31) и (1.32), (1.33) и (1.34) или (1.35), взятым со знаком равенства.

Предельные возможности формоизменения анизотропного упрочняющегося листового материала следует оценивать с учетом технических требований на

изготовление изделий по соотношениям (1.31) и (1.32), (1.33) и (1.34) или (1.35) в зависимости от условий протекания технологических процессов холодной штамповки.

При анализе процессов холодной штамповки необходимо к указанным выше соотношениям присоединить уравнения равновесия, соотношения Коши, условие несжимаемости материала и анализировать полученную систему уравнений численно с учетом граничных условий в напряжениях и скоростях.

1.7. Устойчивость трубной заготовки из анизотропного материала в пластической области в виде образования складок

Технологические возможности многих процессов листовой штамповки лимитируются потерей устойчивости заготовки второго типа при ее формоизменении, т.е. явлением волнистости, складок, гофров на участках заготовки, деформируемых при сжимающих или сжимающих и растягивающих напряжениях. Теория устойчивости заготовок при их пластическом изменении является наименее разработанным разделом теории обработки металлов давлением. Изучение устойчивости заготовок при обработке металлов давлением усложняется тем, что заранее неизвестны формы и размеры заготовки в момент начала потери устойчивости, так как это явление возникает в процессе деформирования. Кроме того, напряженное состояние заготовки и интенсивность упрочнения изменяются в процессе формоизменения. Часто при анализе устойчивости заготовок при пластическом формоизменении используют статический критерий устойчивости, при использовании которого аналитические решения получаются более простыми. Сущность статического критерия устойчивости состоит в том, что рассматриваются состояния равновесия, бесконечно близкие к основному состоянию равновесия, т.е. при некотором значении нагрузки наряду с основной формой возможна другая форма равновесия, а именно, при несколько искривленной заготовке.

1.7.1. Основные соотношения и предположения

Рассмотрим осадку трубной заготовки с начальными и текущими размерами: средний радиус заготовки R_{cp} , высота h_0, h , толщина s_0, s (рисунок 1.1).

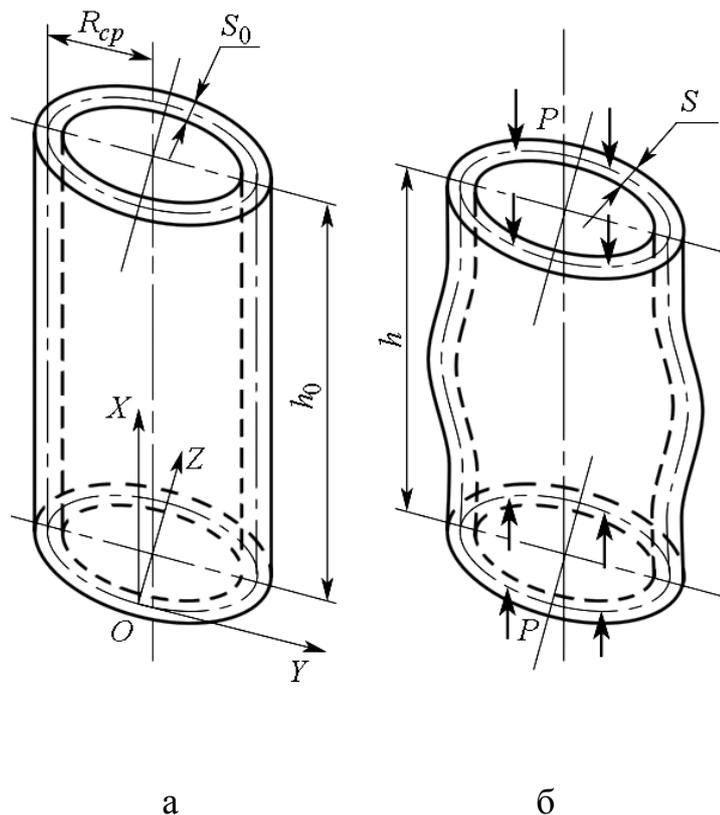


Рисунок 1.1 Цилиндрическая оболочка:

а – до деформирования; б – после потери устойчивости

Формоизменение трубной заготовки при потере устойчивости отличается от формоизменения пластин и стержней, так как с началом потери устойчивости в заготовке появляется дополнительное тангенциальное напряжение, возникающее вследствие увеличения диаметра срединной поверхности оболочки при ее выпучивании.

Принимается, что в начальной стадии потери устойчивости при осадке свободно опертой заготовки концы заготовки защемлены, что соответствует экспериментальным исследованиям [36, 168].

Материал заготовки цилиндрически ортотропный, подчиняется условию текучести Мизеса - Хилла (1.1) и ассоциированному закону течения (1.2)

$$\begin{aligned}\delta\varepsilon_x &= \frac{3}{2(H+F+G)} \frac{\delta\varepsilon_i}{\sigma_i} [H(\sigma_x - \sigma_y) + G(\sigma_x - \sigma_z)]; \\ \delta\varepsilon_y &= \frac{3}{2(H+F+G)} \frac{\delta\varepsilon_i}{\sigma_i} [F(\sigma_y - \sigma_z) + H(\sigma_y - \sigma_x)]; \\ \delta\varepsilon_z &= \frac{3}{2(H+F+G)} \frac{\delta\varepsilon_i}{\sigma_i} [G(\sigma_z - \sigma_x) + F(\sigma_z - \sigma_y)],\end{aligned}\quad (1.36)$$

где интенсивность напряжений σ_i определяется по выражению

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2(F+G+H)} [F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2]}^{1/2}, \quad (1.37)$$

а приращение интенсивности деформаций $\delta\varepsilon_i$ как

$$\begin{aligned}\delta\varepsilon_i &= \sqrt{\frac{2(F+G+H)}{3}} \left[F \left(\frac{F\delta\varepsilon_y - H\delta\varepsilon_z}{FG+GH+HF} \right)^2 + G \left(\frac{H\delta\varepsilon_z - F\delta\varepsilon_x}{FG+GH+HF} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + H \left(\frac{F\delta\varepsilon_x - G\delta\varepsilon_y}{FG+GH+HF} \right)^2 \right]^{1/2}.\end{aligned}\quad (1.38)$$

Проведем анализ потери устойчивости заготовки на основании статического критерия устойчивости. Учитывая указанные выше особенности формоизменения цилиндрической заготовки при осевой осадке, запишем общее дифференциальное уравнение устойчивости в виде [16]

$$\frac{d^2(\delta M)}{dx^2} + \sigma_x \frac{sd^2\omega}{dx^2} + \frac{1}{R_{cp}} \delta T = 0; \quad (1.39)$$

$$\delta M = \int_{-s/2}^{+s/2} \delta\sigma_x z dz; \quad \delta T = \int_{-s/2}^{+s/2} \delta\sigma_y dz, \quad (1.40)$$

где $R_{\text{н}\delta}$ - радиус срединной поверхности исходной заготовки, δT - изменение дополнительно возникшего при потере устойчивости окружной силы вследствие выпучивания срединной поверхности заготовки, ω - прогиб срединной поверхности заготовки.

Напряженное и деформированное состояния цилиндрической заготовки до момента потери устойчивости принимаются приближенно плоскими в виду отсутствия напряжений по толщине и деформаций срединной поверхности в окружном направлении ($\varepsilon_y = 0$). Рассматривается степень пластической деформации $\varepsilon_x \leq 0,3$.

1.7.2 Условие устойчивости цилиндрической заготовки

Преобразуем выражение для определения интенсивности напряжений и приращения интенсивности деформации так:

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2(R_x + R_y + R_x R_y)}} \times \left[R_x(\sigma_y - \sigma_z)^2 + R_y(\sigma_z - \sigma_x)^2 + R_x R_y(\sigma_x - \sigma_y)^2 \right]^{1/2}; \quad (1.41)$$

$$\delta\varepsilon_i = \sqrt{\frac{2(R_x + R_y + R_x R_y)}{3}} \left[\frac{R_x(\delta\varepsilon_y - R_y \delta\varepsilon_z)^2 + R_y(R_y \delta\varepsilon_z - \delta\varepsilon_x)^2}{(R_y + R_y^2 + R_x R_y)^2} + \frac{R_x R_y(\delta\varepsilon_x R_x - R_y \delta\varepsilon_y)^2}{(R_y + R_y^2 + R_x R_y)^2} \right]^{1/2}, \quad (1.42)$$

где $R_x = \frac{F}{G} R_y$, $R_y = \frac{H}{F}$ - коэффициенты анизотропии заготовки в направлениях оси и в тангенциальном направлении.

Поскольку $\delta\varepsilon_y = 0$, $\varepsilon_y = 0$, $\sigma_z = 0$, то

$$F(\sigma_y) + H(\sigma_y - \sigma_x) = 0; (F + H)\sigma_y = H\sigma_x; \sigma_y = \frac{H\sigma_x}{F + H}; \sigma_y = \frac{R_y \sigma_x}{1 + R_y}. \quad (1.43)$$

Принимая во внимание выражения (1.43) для определения σ_i , окончательно получим

$$\sigma_i = B(R_i)\sigma_x, \quad (1.44)$$

где $\delta\sigma_i = B(R_i)\delta\sigma_x; \quad (1.45)$

$$B(R_i) = \sqrt{\frac{3}{2(R_x + R_y + R_x R_y)}} \left[\frac{R_x R_y^2 + R_y + 2R_y^2 + R_y^3 + R_x R_y}{(1 + R_y)^2} \right]^{1/2}.$$

Принимая во внимание $\delta\varepsilon_z = -\delta\varepsilon_x$, определим $\delta\varepsilon_i$:

$$\delta\varepsilon_i = C(R_i)\delta\varepsilon_x; \quad (1.46)$$

$$C(R_i) = \sqrt{\frac{2(R_x + R_y + R_x R_y)}{3}} \frac{1}{R_y^{1/2}} \frac{(R_x R_y + R_y^2 + 2R_y + 1 + R_x^3)^{1/2}}{1 + R_y + R_x}.$$

Запишем зависимость интенсивности напряжений σ_i от интенсивности деформаций в виде

$$\sigma_i = \sigma_{i0} + A\varepsilon_i^n. \quad (1.47)$$

Касательный модуль упрочнения E_k найдем по формуле

$$E_k = \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i} = An\varepsilon_i^{n-1} = AnC^{n-1}(R_i)\varepsilon_x^{n-1}, \quad (1.48)$$

$$\sigma_x = \frac{\sigma_{i0} + AC^n(R_i)\varepsilon_x^n}{B(R_i)}. \quad (1.49)$$

Для определения приращения напряжения сжатия воспользуемся зависимостью между приращениями деформации и напряжениями (1.36):

$$\delta\varepsilon_x = \frac{3}{2(H + F + G)} \frac{\delta\varepsilon_i}{\sigma_i} [H(\sigma_x - \sigma_y) + G(\sigma_x - \sigma_z)].$$

Принимая во внимание, что

$$\sigma_z = 0, \quad \sigma_y = \frac{H\sigma_x}{F + G} = \frac{R_y\sigma_x}{1 + R_y},$$

найдем

$$\delta\varepsilon_x = \frac{3}{2(R_x + R_x R_y + R_y)} \frac{R_y}{\sigma_i} \frac{\delta\varepsilon_i}{1 + R_y} \frac{R_x R_y + 1 + R_y}{\sigma_x}. \quad (1.50)$$

Отсюда следует

$$\sigma_x = \frac{2(R_x + R_x R_y + R_y)(1 + R_y)}{3 R_y(R_y R_x + 1 + R_y)} \frac{\sigma_i}{\delta\varepsilon_i} \delta\varepsilon_x, \quad (1.51)$$

$$\delta\sigma_x = B_1(R_i)E_k \delta\varepsilon_x, \quad (1.52)$$

где

$$B_1(R_i) = \frac{2(R_x + R_x R_y + R_y)}{3} \frac{(1 + R_y)}{R_y R_x + 1 + R_y}.$$

С момента появления складки начинается происходить осадка заготовки в основном за счет выпучивания стенки. Радиальные напряжения и деформации малы и ими можно пренебречь. Тогда $\delta\varepsilon_x = -\delta\varepsilon_y$. Отсюда следует, что

$$\delta\sigma_y = -\delta\sigma_x \frac{2R_x R_y + R_y}{2R_x R_y + R_x}. \quad (1.53)$$

Принимая во внимание выражение (1.53), будем иметь

$$\delta\sigma_y = B_2 E_k \delta\varepsilon_y, \quad (1.54)$$

где

$$B_2 = \frac{2(R_x + R_x R_y + R_y)(1 + R_y)(2R_x + 1)R_y}{3 R_y (R_y R_x + 1 + R_y) (2R_y + 1)R_x}.$$

По гипотезе плоских сечений при изгибе принимаем линейную зависимость приращения деформаций по толщине оболочки, т.е.

$$\delta\varepsilon_x = \delta\varepsilon_0 + z \frac{d^2\omega}{dx^2}; \quad \delta\varepsilon_y = -\frac{\omega}{R_{cp}}, \quad (1.55)$$

где $\delta\varepsilon_0$ - бесконечно малое приращение деформации срединной поверхности заготовки.

Решая совместно уравнения (1.39), (1.40), (1.52) – (1.55) после интегрирования, получаем

$$B_1(R_i) E_k \frac{s^2}{12} \frac{d^4\omega}{dx^4} + \sigma_x \frac{d^2\omega}{dx^2} - B_2(R_i) E_k \frac{\omega}{R_{cp}^2} = 0. \quad (1.56)$$

В рассматриваемом случае, когда трубчатая заготовка выпучивается наружу и концы ее заделаны, наиболее близкую кривую прогиба можно выразить функцией

$$\omega = \omega_0 \left[1 - \cos \frac{2\pi x}{h} \right] / 2. \quad (1.57)$$

Принятая функция удовлетворяет граничным условиям $\omega = 0$ и $d\omega/dx = 0$ при $x = 0$, $x = h$ и условию изгиба $\omega = \omega_0$; $d\omega/dx = 0$ при $x = h/2$. После подстановки

принятого выражения функции ω и ее дифференциалов в уравнение (1.56) и математических преобразований получаем

$$\frac{B_1(R_i)E_k S^2 4\pi^4}{3h^4} - \sigma_x \frac{4\pi^2}{h^2} + B_2(R_i)E_k \frac{1/[\cos \frac{2\pi x}{h}] - 1}{R_{cp}^2} = 0. \quad (1.58)$$

В уравнении (1.58) величина $\cos \frac{2\pi x}{h}$ изменяется от -1 до +1. Теоретические кривые эквидистантны экспериментальным кривым при $\cos(2\pi x/h)=1/2$ [16]. Учитывая это, подставим 1/2 в уравнение (1.58) вместо $\cos(2\pi x/h)$, тогда получим

$$\sigma_{xкр} = E_k \left[B_1 \frac{\pi^2 s^2}{3h^2} + B_2 \frac{h^2}{R_{cp}^2 4\pi^2} \right]. \quad (1.59)$$

Заметим, что если в выражении (1.59) принять $R_{cp} = \infty$, получим выражение для определения критических сжимаемых напряжений пластины из ортотропного материала.

Подставляя в уравнение (1.59) значения σ_x и E_k из уравнений (1.49) и (1.48) и выражая текущие размеры заготовки через начальные (принимая $\varepsilon_x = \ln \frac{h_0}{h}$ и, следовательно, $h = h_0 / e^{\varepsilon_x}$, $s = s_0 e^{\varepsilon_x}$), получаем

$$\frac{\sigma_{i0} + AC^n(R_i)\varepsilon_x^n}{B} = E_k \left[B_1 \frac{\pi^2 s_0^2 e^{4\varepsilon_x}}{3h_0^2} + B_2 \frac{h_0^2}{4\pi^2 R_{\text{н\delta}}^2 e^{2\varepsilon_x}} \right];$$

$$\frac{h_0}{s_0} = \frac{2\pi^2 e^{3\varepsilon_x} R_{\text{н\delta}}}{\sqrt{3}} \sqrt{B(R_i)E_k B_1(R_i) /$$

$$/ \sqrt{[\sigma_{e0} + AC^n(R_i)\varepsilon_x^n] 4\pi^2 R_{\text{н\delta}}^2 e^{2\varepsilon_x} - B(R_i)E_k B_2(R_i)h_0^2}}. \quad (1.60)$$

В частном случае изотропного материала $R_x = R_y = 1$, учитывая $B = \sqrt{3}/2$;

$C = 2/\sqrt{3}$; $\sigma_i = A\varepsilon_i^n$; $B_1 = 4/3$; $E_k = \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i} = An \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{n-1} \varepsilon_x^{n-1}$, $B_2 = 4/3$, будем иметь

$$\frac{h_0}{s_0} = \pi e^{2\varepsilon_x} \sqrt{\frac{n}{3[\varepsilon_x - h_0^2 \alpha / 4\pi^2 R_{\tilde{n}\delta}^2 e^{2\varepsilon_x}]}}. \quad (1.61)$$

Эта формула совпадает с формулой для определения h_0/s_0 при изотропном материале.

1.7.3 Обсуждение результатов расчетов

На рисунке 1.2 приведены графические зависимости изменения величины h_0/s_0 от степени деформации ε_x (при $R_{\tilde{n}\delta} = r_0 = 50$ мм; $s_0 = 4$ мм) при осадке трубных заготовок из алюминиевого сплава АМг6 и стали 08кп.

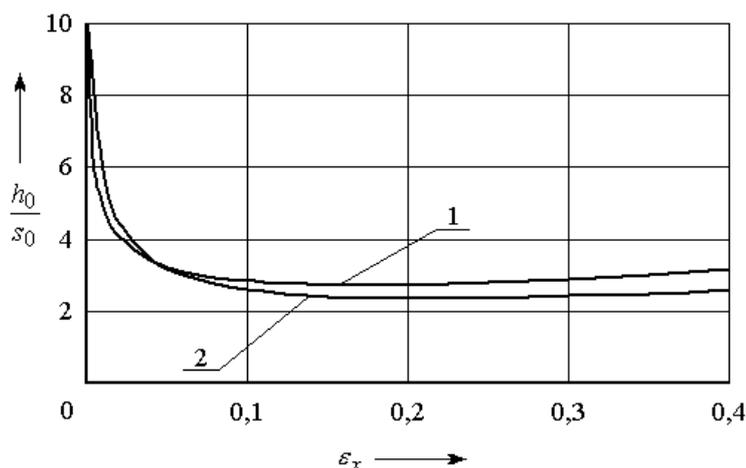


Рисунок 1.2 – Зависимости изменения h_0/s_0 от ε_x :

кривая 1 – сталь 08 кп; кривая 2 – алюминиевый сплав АМг6

Расчеты выполнены для трубной заготовки из стали 08кп и алюминиевого сплава АМг6 со следующими механическими характеристиками и геометрическими размерами трубной заготовки: сталь 08кп - $\sigma_{i0} = 377,15$ МПа; $A = 488,9$ МПа; $n = 0,48$; $R_x = R_p = 0,817$, $R_y = R_\theta = 0,783$; алюминиевый сплав АМг6 - $\sigma_{i0} = 194,19$ МПа; $A = 275,11$ МПа; $n = 0,256$; $R_x = R_p = 0,67$; $R_y = R_\theta = 0,54$.

Анализ результатов расчетов показывает, что с увеличением степени деформации устойчивость заготовки и, следовательно, величина h_0/s_0

уменьшаются и, достигнув минимума, начинает возрастать в связи с увеличением толщины стенки заготовки, упрочнением материала и уменьшением высоты заготовки. Полученные зависимости справедливы до $h_0/R_{\text{н}\delta} \leq 6$. При больших значениях отношения у заготовки начинают возникать две выпучины на расстоянии от торцов до середины выпучины $l = h/4$.

Графические зависимости изменения величины h_0/s_0 от степени деформации ε_x и параметра деформационного упрочнения n представлены на рисунке 1.3. Расчеты выполнены для материала со следующими механическими характеристиками: $\sigma_{i0} = 377,15$ МПа; $A = 488,9$ МПа; $n = 0,48$; $R = 1$ ($R_{\text{н}\delta} = r_0 = 50$ мм; $s_0 = 4$ мм).

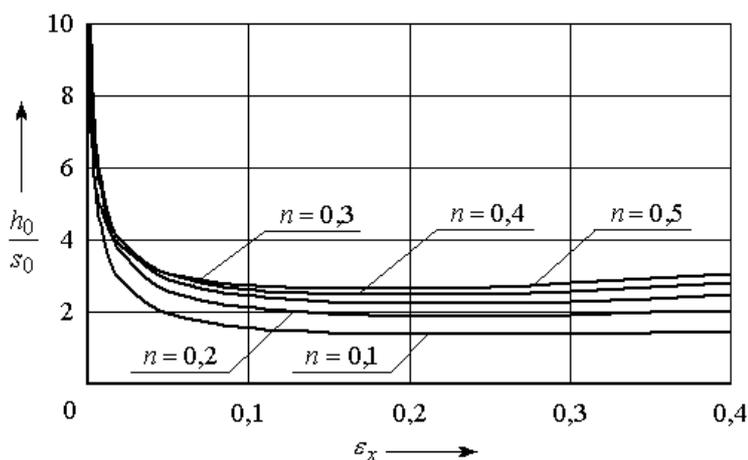


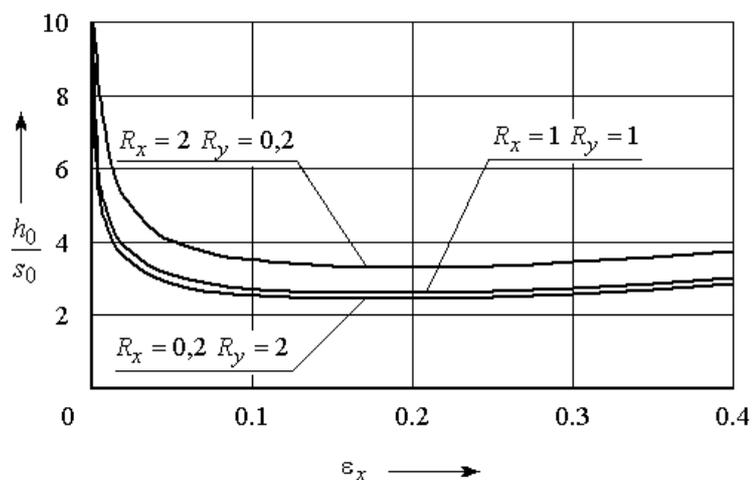
Рисунок 1.3 – Зависимость h_0/s_0 от ε_x

Установлено, что чем выше показатель деформационного упрочнения n , тем больше значение h_0/s_0 и выше устойчивость заготовки.

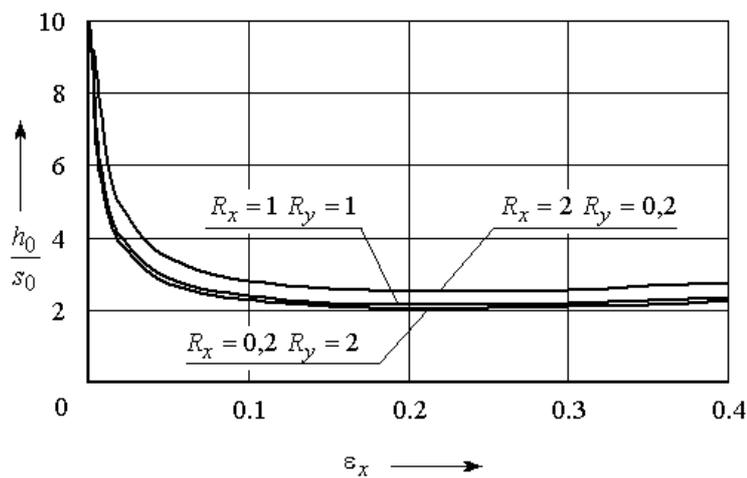
Приведенные соотношения позволили установить влияние цилиндрической анизотропии механических свойств исходной трубной заготовки на устойчивость в виде образования складок.

На рис. 1.4 приведены графические зависимости изменения величины h_0/s_0 от степени деформации ε_x : для первого материала $\sigma_{i0} = 377,15$ МПа ; $A = 488,9$ МПа ;

$n = 0,48$; для второго материала $\sigma_{i0} = 194,19 \text{ МПа}$; $A = 275,11 \text{ МПа}$; $n = 0,256$. При следующих размерах трубных заготовок: $R_{\text{н}\delta} = 50 \text{ мм}$, $s_0 = 4 \text{ мм}$.



а



б

Рисунок 1.4 – Зависимость величины h_0/s_0 от ε_x и R :
а – материал 1; б – материал 2

Анализ графических зависимостей показывает, что для материалов, обладающих цилиндрической анизотропией механических свойств, увеличение коэффициента анизотропии R_x и одновременное уменьшение коэффициента R_y приводит к снижению значения h_0/s_0 по сравнению с материалом, имеющим меньшее значение коэффициента анизотропии R_x и большее значение коэффициента анизотропии R_y . Аналогично для материала, имеющего большее значение коэффициента анизотропии R_x и одновременно меньшее значение

коэффициента анизотропии R_y , характерно более плавное снижение значения h_0/s_0 с увеличением степени деформации ε_x .

Установлено влияние нормальной анизотропии механических свойств исходной трубной заготовки на устойчивость в виде образования складок.

На рисунках 1.5 и 1.6 приведены графические зависимости изменения величины h_0/s_0 от степени деформации ε_x : для первого материала $\sigma_{i0} = 377,15 \text{ МПа}$; $A = 488,9 \text{ МПа}$; $n = 0,48$; для второго материала $\sigma_{i0} = 194,19 \text{ МПа}$; $A = 275,11 \text{ МПа}$; $n = 0,256$. При следующих размерах трубных заготовок $R_{\text{н\delta}} = 50 \text{ мм}$, $s_0 = 4 \text{ мм}$.

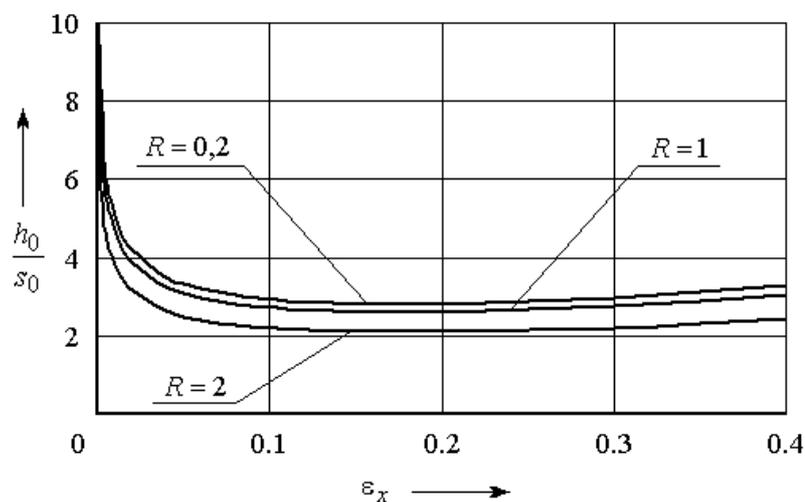


Рисунок 1.5 – Зависимость величины h_0/s_0 от ε_x и R для материала 1

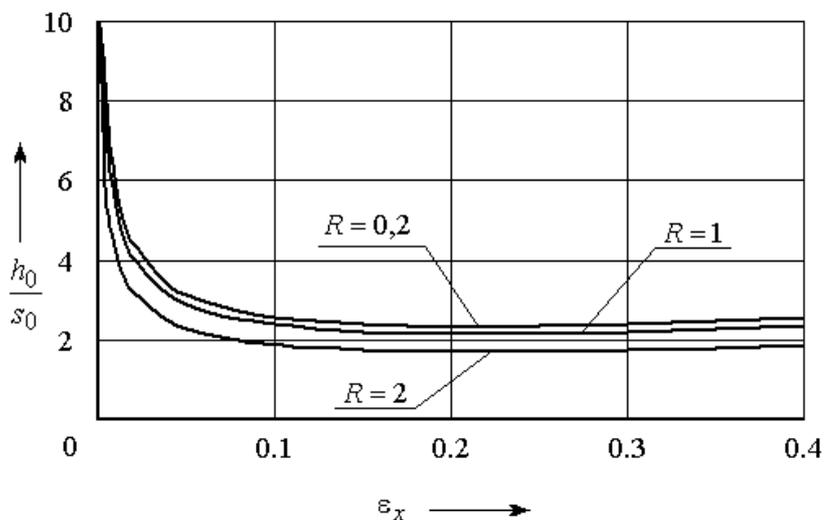


Рисунок 1.6 – Зависимость величины h_0/s_0 от ε_x и R для материала 2

Анализ графических зависимостей (см. рисунки 1.5 и 1.6) показывает, что снижение коэффициента нормальной анизотропии R приводит к более устойчивому протеканию процесса осадки трубной заготовки.

2 Теоретические исследования первой операции вытяжки осесимметричных деталей из кристаллических анизотропных материалов

Типовыми конструкциями производства изделий ракетно-космической техники являются корпусные оболочки из листовых заготовок (оболочки емкостей, корпусные детали, сосуды высокого давления, днища баков и т.д.). Эти конструкции требуют применения высокопрочных материалов (специальных титановых и высокопрочных алюминиевых сплавов), трудоемки в обработке. Для этих целей используются специальные титановые и высокопрочные алюминиевые сплавы. Для изготовления тонкостенных днищ баков и полуторов обычно используют многооперационную ступенчатую вытяжку.

Технологические режимы пластического деформирования определяют степени формообразования, влияют на устойчивость деформаций, развитие несплошности материала и возможное разрушение. Они формируют качество изделий, что связано с анизотропией механических свойств, упрочнением материала, локальной потерей устойчивости заготовки и т.д.

2.1 Математическая модель первой операции вытяжки в радиальной матрице осесимметричных деталей

Рассмотрим первую операцию вытяжки (без утонения стенки) анизотропного упрочняющегося материала с прижимом через радиальную матрицу с радиусом закругления R_M и степенью деформации $\psi = 1 - m_{d1}$, где m_{d1} - коэффициент вытяжки; $m_{d1} = d_1 / D_0$; d_1 - диаметр изделия по срединной поверхности заготовки; D_0 - диаметр исходной листовой заготовки.

Очаг пластической деформации разбивается на характерные участки.

На рисунках 2.1 и 2.2 приведены схемы к теоретическому анализу первой операции вытяжки без утонения стенки на радиальной матрице, соответствующие начальной стадии деформирования и моменту совпадения центра закругления

пуансона с верхней кромкой пояска матрицы ($z > s_0$). Здесь z - величина одностороннего зазора между пуансоном и матрицей.

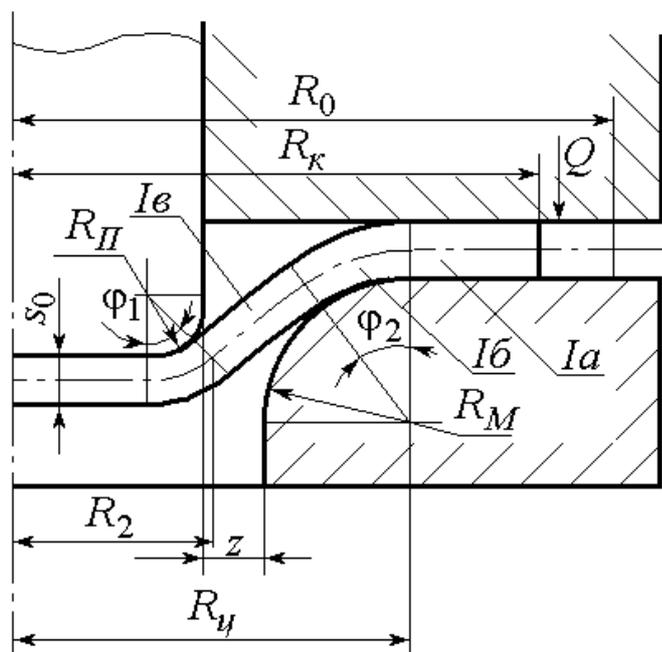


Рисунок 2.1 - Схема к теоретическому анализу первой стадии операции вытяжки через радиальную матрицу

Материал принимается несжимаемым, начально трансверсально-изотропным, изотропно-упрочняющимся, для которого справедливо условие текучести Мизеса-Хилла (1.1) и ассоциированный закон течения (1.2).

Предполагаем, что процесс вытяжки протекает в условиях плоского напряженного состояния. Упрочнение материала в процессе пластического формообразования принимаем изотропным. Допускаем, что на контактных границах заготовки и рабочего инструмента реализуется закон трения Кулона.

В основу анализа положен метод расчета силовых параметров процесса, основанный на совместном решении приближенных дифференциальных уравнений равновесия и условий текучести с учетом сопряжений на границах участков, а также изменения направления течения материала.

Рассмотрим распределение напряжений и деформаций в заготовке на первой стадии процесса вытяжки без утонения стенки при наличии трех характерных участков (рисунок 2.1).

Очаг деформации состоит из трех участков: участок Ia расположен на плоскости матрицы и ограничен краем заготовки с текущей координатой R_k с одной стороны и постоянной координатой R_{σ} , точкой сопряжения плоского и криволинейного участков матрицы; участок $Iб$ охватывает входную кромку матрицы и ограничен угловыми координатами $\varphi = 0$ и текущим значением угла охвата заготовкой тороидальной поверхности матрицы φ_2 ; участок $Iв$ (участок бесконтактной деформации) расположен между входной кромкой конуса матрицы и кромкой пуансона.

Меридиональные σ_r и окружные σ_{θ} напряжения на участке Ia определяются путем численного решения (методом конечных разностей) приближенного уравнения равновесия

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r \left(1 + \frac{rds}{sdr} \right) - \sigma_{\theta} = 0 \quad (2.1)$$

совместно с условием пластичности

$$\sigma_r^2 + \sigma_{\theta}^2 - \frac{2R}{1+R} \sigma_r \sigma_{\theta} = \sigma_s^2 \quad (2.2)$$

при граничном условии

$$r = R_k, \quad \sigma_r = \frac{\mu M Q}{\pi R_k s_0}, \quad (2.3)$$

где r - текущий радиус рассматриваемой точки, $R_k \geq r \geq R_u$; R_k - радиус края заготовки в рассматриваемый момент времени; μ_j - коэффициент трения на контактной поверхности матрицы и прижима; Q - сила прижима [133]; q - давление прижима;

$$Q = \pi(R_k^2 - R_{\sigma}^2)q. \quad (2.4)$$

Величина давления прижима q зависит от величины относительной толщины листовой заготовки $S_D = s_0/D_0$.

При анализе процесса вытяжки без прижима в граничном условии (2.3) необходимо принять $Q=0$.

Рассмотрим кинематическое и деформированное состояния материала на этом участке. Скорости деформации в меридиональном, тангенциальном направлениях и по толщине определяются по выражениям

$$\xi_r = \frac{dV_r}{dr}; \quad \xi_\theta = \frac{V_r}{r}; \quad \xi_z = \frac{\dot{s}}{s},$$

где V_r – меридиональная скорость течения.

Используя уравнение несжимаемости $\xi_r + \xi_\theta + \xi_z = 0$ и уравнения связи скоростей деформаций и напряжений, найдем

$$\frac{dV_r}{dr} = -\frac{V_r}{r}(1+f); \quad f = -\frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{\sigma_\theta(1+R) - R\sigma_r}. \quad (2.5)$$

Уравнение для определения изменения толщины заготовки запишется как

$$\frac{ds}{s} = \frac{dr}{r} f. \quad (2.6)$$

Принимая во внимание выражение (6), получим уравнение равновесия (2.1) в виде:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r(1+f) - \sigma_\theta}{r} = 0. \quad (2.7)$$

Интегрирование этого уравнения выполняем численно методом конечных разностей от краевой части заготовки, где известны все входящие в уравнение величины,

$$\sigma_{rn} = \sigma_{rn-1} - \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n-1}} [\sigma_{rn-1}(1+f) + \sigma_{\theta n-1}]. \quad (2.8)$$

После определения σ_{rn} находим $\sigma_{\theta n}$ из условия пластичности (2.2) с учетом (2.3).

Для нахождения напряжений σ_r и σ_θ на тороидальной поверхности матрицы (участок I б) решаем совместно условие равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{d\varphi} - \sigma_r \left(\frac{\cos\varphi}{a - \sin\varphi} + \mu - \frac{ds}{s d\varphi} \right) + \sigma_\theta \frac{\cos\varphi + \mu \sin\varphi}{a - \sin\varphi} = 0 \quad (2.9)$$

и условие пластичности (2.2) при граничных условиях

$$\text{при } \varphi = 0 \quad \sigma_r = \sigma_{r\varphi} \Big|_{r=R_u} + \sigma_{sr} \Big|_{r=R_u} \cdot \frac{s}{4R_{MC}}, \quad (2.10)$$

где φ - угол, характеризующий положение рассматриваемого сечения заготовки на тороидальной поверхности матрицы; μ_M - коэффициент трения на контактной поверхности матрицы; $a = R_{\ddot{o}}/R_{MC}$; $R_{MC} = R_M + 0,5s_0$; $\sigma_{r\varphi}$ - величина меридионального напряжения во фланце заготовки (участок Ia), вычисленная при $r = R_u$; σ_{sr} - сопротивление материала пластическому деформированию с учетом его упрочнения при $r = R_u$.

Распределение меридиональных σ_r и окружных σ_θ напряжений на конусообразном участке бесконтактной деформации определяется путем численного интегрирования уравнения равновесия (2.1) с условием пластичности (2.2) при граничном условии

$$r = R_1, \quad \sigma_r = \sigma_{rT} \Big|_{\varphi=\varphi_2} + \sigma_{sr} \Big|_{\varphi=\varphi_2} \frac{s}{4R_{MC}}. \quad (2.11)$$

Здесь φ_2 - угол, определяющий границу тороидального и конусообразного участков; $\varphi = \varphi_2$; σ_{rT} - меридиональное напряжение на тороидальной поверхности матрицы, вычисленное при $\varphi = \varphi_2$; $\sigma_{sr} \Big|_{\varphi=\varphi_2}$ - сопротивление материала пластическому деформированию при $\varphi = \varphi_2$.

Заметим, что в выражении (2.11) последнее слагаемое учитывает приращение меридионального напряжения, связанное со спрямлением заготовки.

Первая стадия процесса вытяжки оканчивается в момент полного прилегания заготовки тороидальной поверхности матрицы.

Сила процесса на первой стадии вытяжки находится по формуле:

$$P = 2\pi(r_1 - R'_{PC} + R_{PC} \sin \varphi)s_0\sigma_{rI} \sin \varphi, \quad (2.12)$$

где $R'_{I\tilde{N}} = R_I + 0,5s_0$; $R_{I\tilde{N}} = R_I + 0,5s_0$; σ_{rI} - меридиональное напряжение на выходе из очага пластической деформации при $r = R_2$, которое определяется с учетом соотношений (2.1), (2.2), (2.5) при граничных условиях (2.3), (2.6) и (2.7) в

случае наличия конусообразного участка бесконтактной деформации ($\varphi = \varphi_2$) и с учетом выражений (2.1), (2.2) и (2.5) в момент полного прилегания заготовки к тороидальной поверхности матрицы ($\varphi = \varphi_1$) при граничных условиях (2.3), (2.6) и (2.9).

Для учета изотропного упрочнения материала в зоне плоского напряженного состояния I необходимо иметь информацию о распределении деформаций в очаге пластической деформации.

Величина окружной деформации находится по выражению

$$d\varepsilon_\theta = dr/r_{0T}, \quad (2.13)$$

где r - координата рассматриваемого сечения очага деформации; r_{0T} - начальная координата рассматриваемого сечения очага деформации в плоской заготовке, которая определяется из условия постоянства объема.

Приращения меридиональных деформаций $d\varepsilon_r$ и деформаций по толщине заготовки $d\varepsilon_z$ могут быть определены с учетом ассоциированного закона пластического течения (1.2) следующим образом:

$$d\varepsilon_r = \frac{dr}{r} \cdot \frac{H(\sigma_r - \sigma_\theta) + G\sigma_r}{F\sigma_\theta + H(\sigma_\theta - \sigma_r)}; \quad (2.14)$$

$$d\varepsilon_z = -\frac{dr}{r} \cdot \frac{G\sigma_r + F\sigma_\theta}{F\sigma_\theta + H(\sigma_\theta - \sigma_r)}. \quad (2.15)$$

Величина приращения интенсивности деформации $d\varepsilon_i$ определяется по формуле (1.5), интенсивность деформации ε_i - по выражению

$$\varepsilon_i = \int_{r_{0T}}^r d\varepsilon_i, \quad (2.16)$$

где r - координата рассматриваемого сечения очага деформации.

Изменение толщины заготовки в процессе вытяжки оценивается по соотношению

$$\ln \frac{s}{s_0} = - \int_{R_0}^r \frac{G\sigma_r + F\sigma_\theta}{F\sigma_\theta + H(\sigma_\theta - \sigma_r)} \frac{dr}{r}. \quad (2.17)$$

Положение внешнего края R_k в процессе деформации вычисляется из условия постоянства площади поверхности заготовки в зависимости от перемещения пуансона h_j .

Следует отметить, что при $\varphi = \pi/2$ конусообразный участок бесконтактной деформации (участок Ib) исчезает (рисунок 2.2).

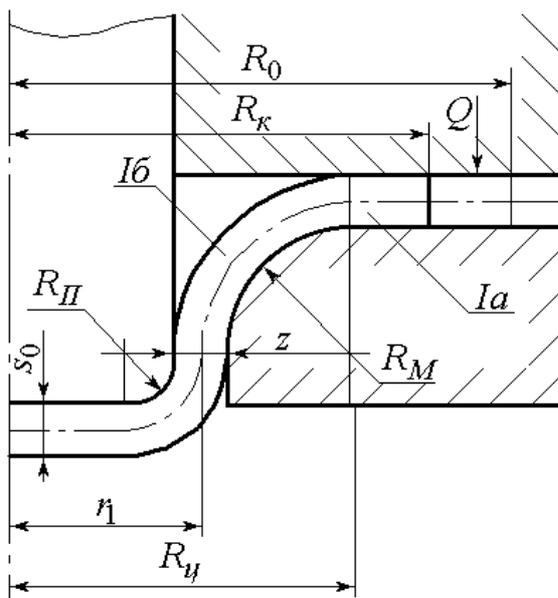


Рисунок 2.2 - Схема к теоретическому анализу первой операции вытяжки на радиальной матрице

Сила процесса в этот момент деформирования находится по формуле

$$P = \pi d_1 s_0 \sigma_{r \text{ вых}}, \quad (2.18)$$

в которой величина меридионального напряжения на выходе из очага деформации $\sigma_{r \text{ вых}}$ оценивается так:

$$\sigma_{r \text{ вых}} = \sigma_r \Big|_{\varphi = \pi/2} + \sigma_{s_r} \Big|_{\varphi = \pi/2} \frac{s}{4R_{MC}}, \quad (2.19)$$

где $\sigma_r \Big|_{\varphi = \pi/2}$ - меридиональные напряжения на тороидальной поверхности матрицы, вычисленные при $\varphi = \pi/2$; $\sigma_{s_r} \Big|_{\varphi = \pi/2}$ - сопротивление материала

пластическому деформированию при $\varphi = \pi/2$; d_1 - диаметр изделия по срединной поверхности.

2.2. Установление влияния анизотропии механических свойств исходных материалов, технологических параметров на силовые режимы, предельные возможности формоизменения и формирование показателей качества изготавливаемых осесимметричных деталей

2.1 Силовые режимы первой операции вытяжки

Силовые режимы первой операции вытяжки исследовались в зависимости от коэффициентов вытяжки m_{d_1} , радиуса закругления матрицы R_M , условий трения на контактных поверхностях рабочего инструмента и заготовки μ_M , а также давления прижима q для ряда листовых материалов различной исходной толщины s_0 , механические свойства которых приведены в таблице 2.1, применительно к изготовлению крупногабаритных деталей ракетно-космической техники.

Таблица 2.1 - Механические свойства исследуемых материалов

Марка сплава	$\sigma_{0,2}$, МПа	B , МПа	n	Ω	U	R
Алюминиевый сплав А5М	195,7	277,240	0,256	0,716	-1,24	0,6
Титановый сплав ПТ-3ВкТ	600,8	502,44	0,559	1,2365	-1,3375	2
Примечание: кривая упрочнения - $\sigma_s = \sigma_{0,2} + A(\varepsilon_i)^n$; предельная интенсивность деформации - $\varepsilon_{inp} = \Omega \exp\left(U \frac{\sigma}{\sigma_i}\right)$.						

Расчеты выполнены в следующих диапазонах изменения указанных выше технологических параметров: $m_{d1}=0,5...0,9$; $\bar{R}_M=2...10$; $\mu_j=0,05...0,2$; $\bar{R}_M = R_M/s_0$; $D_0 = 800$ мм; $s_0 = 3,5$ мм.

На рисунках 2.3 - 2.10 приведены зависимости изменения относительной величины удельной силы $\bar{P} = P/(2\pi r_1 s_0 \sigma_{0,2})$ на первой операции вытяжки в радиальных матрицах от относительного радиуса закругления матрицы \bar{R}_M , коэффициента вытяжки m_{d1} , коэффициента трения на контактной поверхности матрицы μ_M и относительного давления прижима $\bar{q} = q/\sigma_{0,2}$ при фиксированных значениях других параметров для алюминиевого А5М и титанового ПТ-3Вкт сплавов.

Расчеты выполнены при $\mu_M = 0,05$. Точками обозначены экспериментальные величины $\bar{P}_{экс}$. Сила процесса определялась по манометру.

Анализ результатов расчетов и графических зависимостей показал, что относительная величина силы \bar{P} существенно зависит от коэффициентов вытяжки m_{d1} . С уменьшением его относительная величина относительной силы \bar{P} растет (рисунки 2.4 и 2.8). Увеличение радиуса матрицы оказывает влияние на изменение силовых режимов вытяжки при небольших значениях коэффициентов вытяжки m_{d1} . Так, увеличение относительного радиуса матрицы \bar{R}_M с 4 до 20 при $m_{d1}=0,8$ приводит к росту силовых режимов более чем в 2 раза (рисунки 2.3 и 2.7).

Установлено, что с ростом коэффициента трения на матрице μ_M величина относительной силы \bar{P} возрастает. Влияние коэффициент трения на контактной поверхности матрицы и заготовки μ_j усиливается с уменьшением коэффициента вытяжки m_{d1} (рисунки 2.5 и 2.9). Увеличение давления прижима q сопровождается ростом силовых режимов вытяжки (рисунки 2.6 и 2.10).

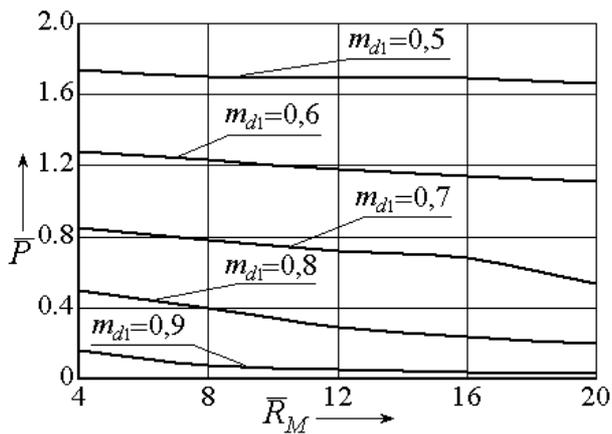


Рисунок 2.3 - Графические зависимости изменения \bar{P} от \bar{R}_M для алюминиевого сплава А5М ($q = 10 \text{ МПа}$; $\mu_M = 0,05$)

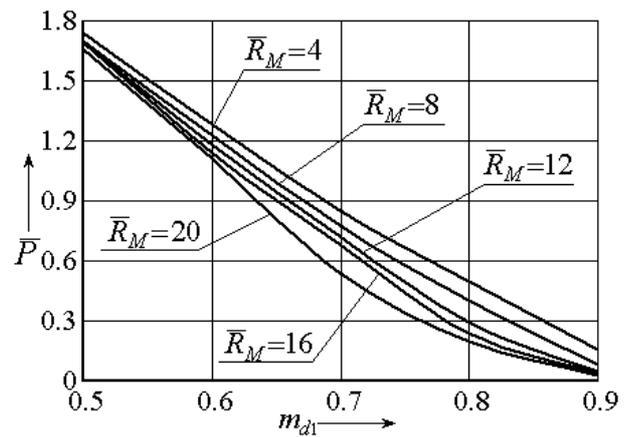


Рисунок 2.4 - Графические зависимости изменения \bar{P} от m_{d1} для алюминиевого сплава А5М ($q = 10 \text{ МПа}$; $\mu_M = 0,05$)

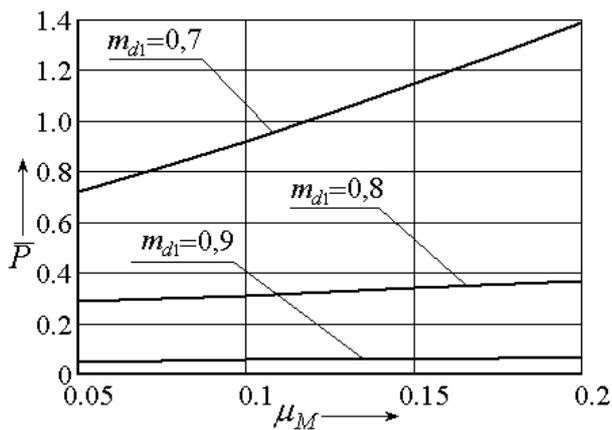


Рисунок 2.5 - Графические зависимости изменения \bar{P} от μ_M для алюминиевого сплава А5М ($\bar{R}_M = 12$; $q = 10 \text{ МПа}$)

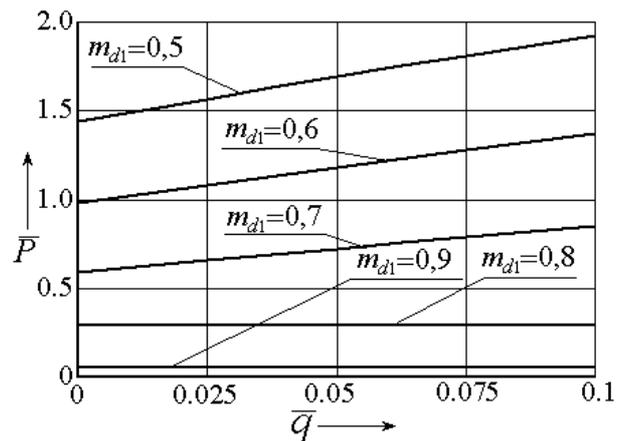


Рисунок 2.6 - Графические зависимости изменения \bar{P} от \bar{q} для алюминиевого сплава А5М ($\bar{R}_M = 12$; $\mu_M = 0,05$)

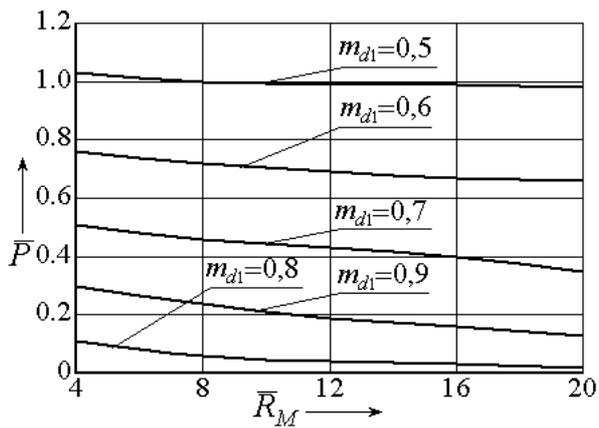


Рисунок 2.7 - Графические зависимости изменения \bar{P} от \bar{R}_M для титанового сплава ПТ-3Вкт ($q = 10 \text{ МПа}$; $\mu_M = 0,05$)

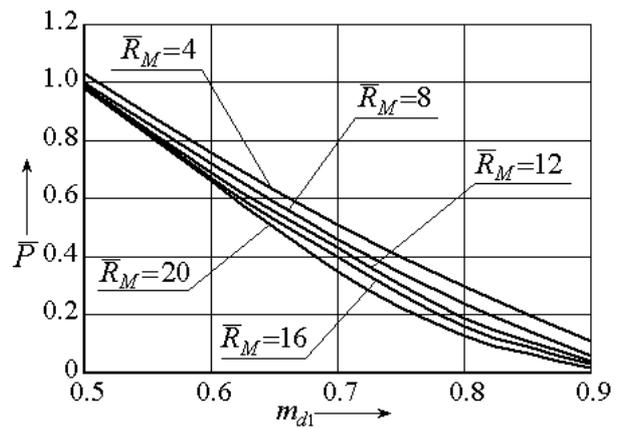


Рисунок 2.8 - Графические зависимости изменения \bar{P} от m_{d1} для титанового сплава ПТ-3Вкт ($q = 10 \text{ МПа}$; $\mu_M = 0,05$)

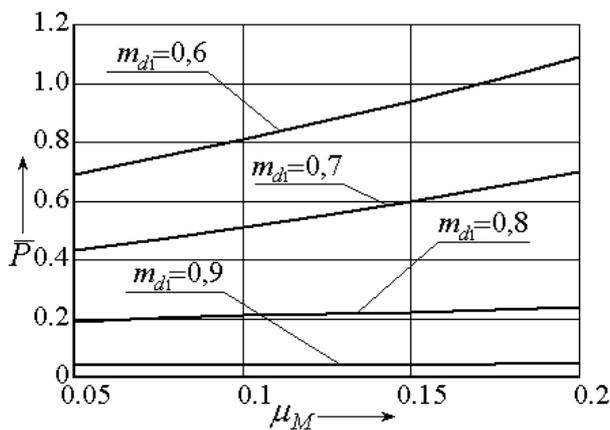


Рисунок 2.9 - Графические зависимости изменения \bar{P} от μ_M для титанового сплава ПТ-3Вкт ($\bar{R}_M = 12$; $q = 10 \text{ МПа}$)

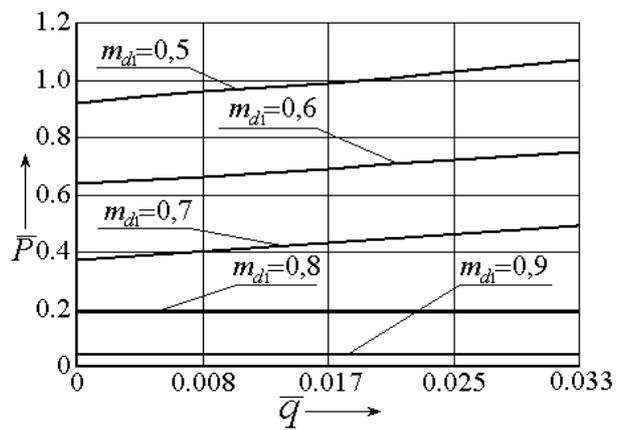


Рисунок 2.10 - Графические зависимости изменения \bar{P} от \bar{q} для титанового сплава ПТ-3Вкт ($\bar{R}_M = 12$; $\mu_M = 0,05$)

Графические зависимости изменения относительной величины силы \bar{P} на первой операции вытяжки в радиальных матрицах от относительного радиуса закругления матрицы \bar{R}_M , коэффициента вытяжки m_{d1} , коэффициента трения на контактной поверхности матрицы μ_M и относительного давления прижима \bar{q} при фиксированных значениях других параметров для титанового сплава ПТ-3 Вкт приведены на рисунках 2.7 - 2.10.

Анализ графических зависимостей показывает, что для титанового сплава установлены аналогичные качественные закономерности и изменения исследуемых параметров от технологических параметров, как и для алюминиевого сплава А5М.

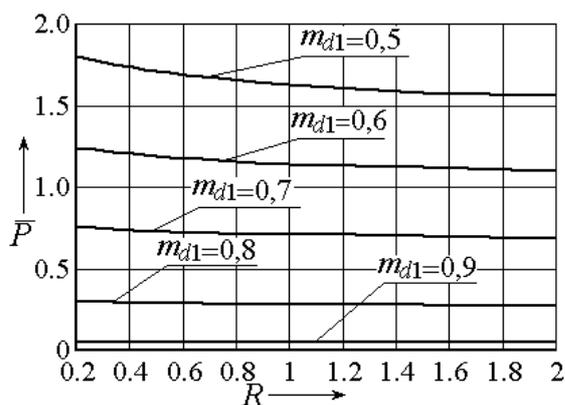
В ряде случаев при проектировании технологических процессов многоступенчатой вытяжки осесимметричных деталей достаточно иметь информацию по оценке силовых режимов процесса. В этом случае возможно воспользоваться формулами [97], полученными на основе линеаризации условия пластичности.

2.2.2 Влияние анизотропии механических свойств на силовые режимы

На рис. 2.11 и 2.12 приведены графические зависимости изменения относительной величины силы \bar{P} от коэффициента нормальной анизотропии R при фиксированных значениях коэффициента вытяжки m_{d1} и величины давления прижима q .

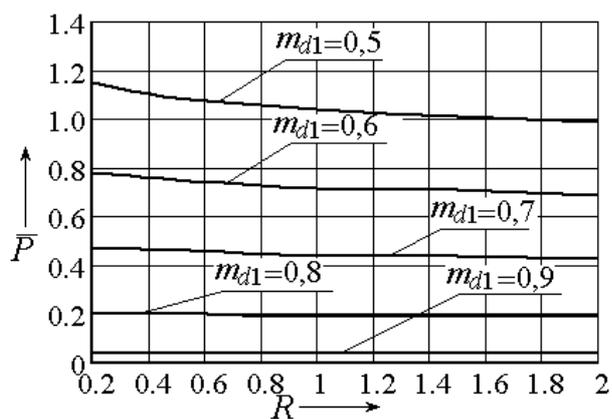
Расчеты выполнены при следующих параметрах кривой упрочнения и разрушения: для материала 1 - $\sigma_{0,2} = 195,7$ МПа; $A = 277,24$ МПа; $n = 0,26$; $\Omega = 0,72$; $U = -1,24$; для материала 2 - $\sigma_{0,2} = 600,8$ МПа; $A = 502,44$ МПа; $n = 0,56$; $\Omega = 1,24$; $U = -1,338$.

Анализ графических зависимостей показывает, что с увеличением коэффициента нормальной анизотропии относительная величина силы \bar{P} уменьшается. Влияние коэффициента анизотропии R на силовые режимы процесса усиливаются с уменьшением коэффициента вытяжки m_{d1} .



(Материал 1)

Рисунок 2.11 - Графические зависимости изменения \bar{P} от коэффициента анизотропии R ($\bar{R}_j = 12$; $q = 10 \text{ И} \ddot{a}$; $\mu_j = 0,05$; $D_0 = 800 \text{ и} \ddot{a}$; $s_0 = 3,5 \text{ и} \ddot{a}$)



(Материал 2)

Рисунок 2.12 - Графические зависимости изменения \bar{P} от коэффициента анизотропии R ($\bar{R}_j = 12$; $q = 10 \text{ И} \ddot{a}$; $\mu_j = 0,05$; $D_0 = 800 \text{ и} \ddot{a}$; $s_0 = 3,5 \text{ и} \ddot{a}$)

Таким образом, при анализе силовых режимов процесса вытяжки необходимо учитывать анизотропию механических свойств исходной листовой заготовки.

2.2.3 Предельные возможности формоизменения

Приведенные в предыдущих разделах соотношения для определения напряженного и деформированного состояний позволяют установить предельные возможности процесса.

Предельные возможности первой операции вытяжки ограничиваются максимальной величиной осевого напряжения σ_x в стенке изделия на выходе из очага деформации, которая не должна превышать величины сопротивления материала пластическому деформированию с учетом упрочнения

$$\sigma_x \leq \sigma_{sx}, \quad (2.20)$$

допустимой степенью использования ресурса пластичности (1.30) и критерием локальной потери устойчивости заготовки (1.35).

При назначении величины коэффициентов вытяжки необходимо учитывать рекомендации по степени использования запаса пластичности В.Л. Колмогорова и А.А. Богатова, согласно которым для ответственных деталей,

работающих и подвергающих после обработки давлением термической обработке (отжигу или закалке), допустимой величиной степени использования запаса пластичности следует считать 0,25; а только для неответственных деталей допустимая степень использования запаса пластичности может быть принята 0,65.

Предельные возможности деформирования на первой операции вытяжки определялись на всем протяжении деформирования и устанавливались путем численных расчетов по этим неравенствам.

Предельные коэффициенты вытяжки исследовались в зависимости от относительного радиуса закругления матрицы $\bar{R}_M=2...20$, условий трения на инструменте $\mu_M = 0,05 ... 0,2$, давления прижима q для исследуемых материалов.

На рисунках 2.13 - 2.26 представлены зависимости изменения предельных коэффициентов вытяжки в зависимости от радиуса исходной листовой заготовки R_0 , относительного радиуса закругления матрицы \bar{R}_M , условий трения на контактной поверхности матрицы и заготовки μ_M , относительного давления прижима q для ряда листовых материалов, широко используемых в ракетно-космической технике. Механические характеристики исследуемых материалов приведены в разд. 2.1.2.

Здесь кривые 1, 2, 3 и 4 соответствуют величинам коэффициентов вытяжки, вычисленным по максимальной величине растягивающего напряжения на выходе из очага пластической деформации, по допустимой степени использования ресурса пластичности материала (выражение (1.30)) при $\omega_e = 1$, $\omega_e = 0,65$ и $\omega_e = 0,25$ соответственно. Положения кривых 3 - 4 определяют возможности деформирования заготовки в зависимости от технических требований на изделие, а положения кривых 1 и 2 указывают на возможность разрушения заготовки по максимальной величине растягивающего напряжения, по степени использования ресурса пластичности.

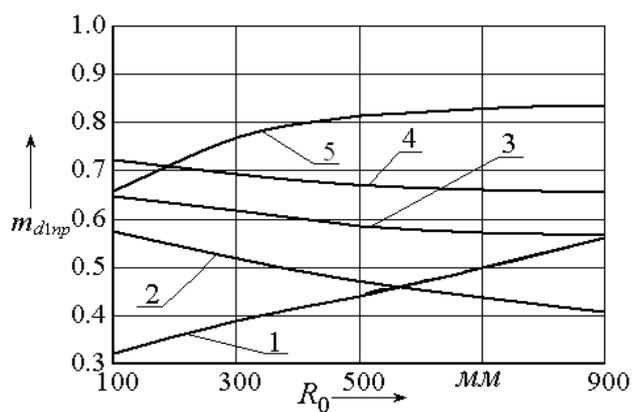


Рисунок 2.13 - Графические зависимости изменения m_{d1np} от R_0 для алюминиевого сплава А5М ($q = 10 \ddot{I}\ddot{a}$; $\mu_j = 0,05$; $s_0 = 3,5 \ddot{I}\ddot{a}$; $\bar{R}_j = 12$)

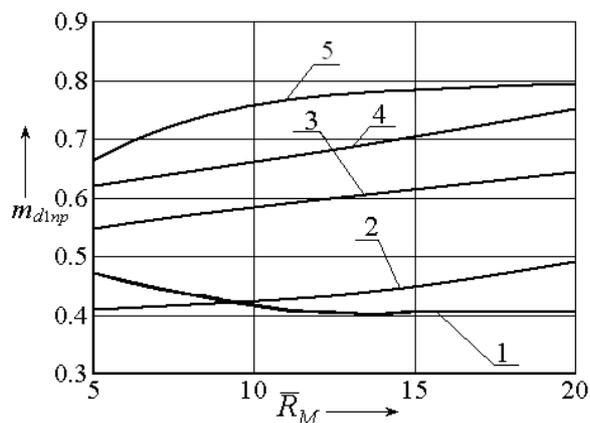


Рисунок 2.14 - Графические зависимости изменения m_{d1np} от \bar{R}_j для алюминиевого сплава А5М ($q = 10 \ddot{I}\ddot{a}$; $\mu_j = 0,05$; $s_0 = 3,5 \ddot{I}\ddot{a}$; $D_0 = 800 \ddot{I}\ddot{a}$)

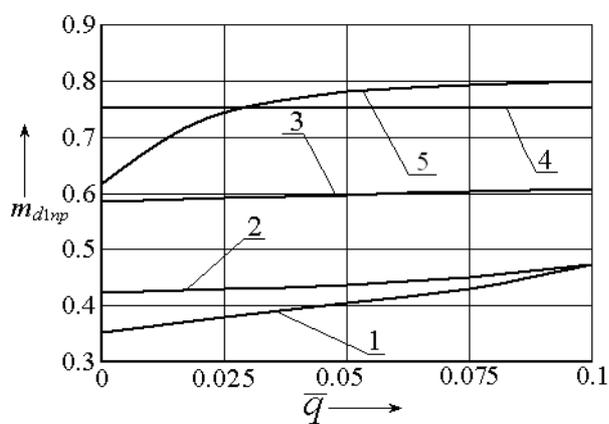


Рисунок 2.15 - Графические зависимости изменения m_{d1np} от \bar{q} для алюминиевого сплава А5М ($\mu_j = 0,05$; $s_0 = 3,5 \ddot{I}\ddot{a}$; $\bar{R}_j = 12$; $D_0 = 800 \ddot{I}\ddot{a}$)

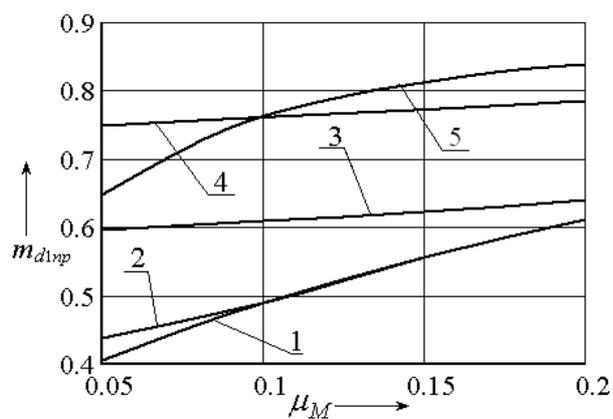


Рисунок 2.16 - Графические зависимости изменения m_{d1np} от μ_j для алюминиевого сплава А5М ($q = 10 \ddot{I}\ddot{a}$; $s_0 = 3,5 \ddot{I}\ddot{a}$; $\bar{R}_j = 12$; $D_0 = 800 \ddot{I}\ddot{a}$)

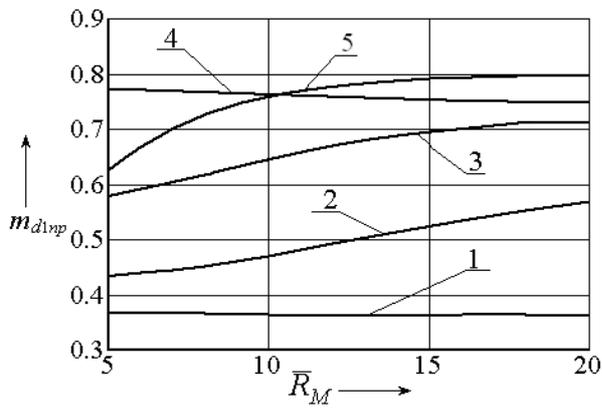


Рисунок 2.17 - Графические зависимости изменения m_{d1np} от \bar{R}_j для алюминиевого сплава А5М ($q = 10 \text{ Ìä}$; $\mu_j = 0,05$; $s_0 = 3,5 \text{ ì}$; $D_0 = 400 \text{ ì}$)

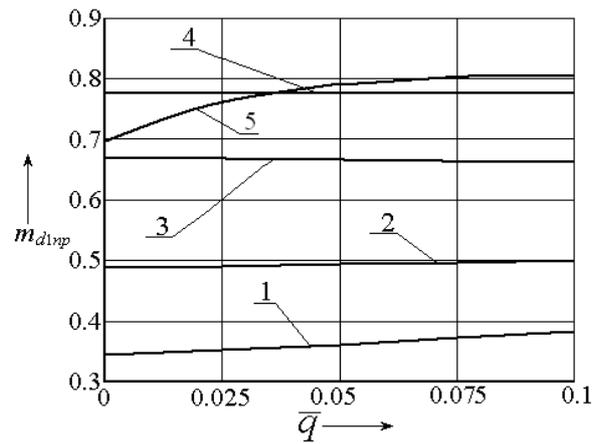


Рисунок 2.18 - Графические зависимости изменения m_{d1np} от \bar{q} для алюминиевого сплава А5М ($\mu_j = 0,05$; $s_0 = 3,5 \text{ ì}$; $\bar{R}_j = 12$; $D_0 = 400 \text{ ì}$)

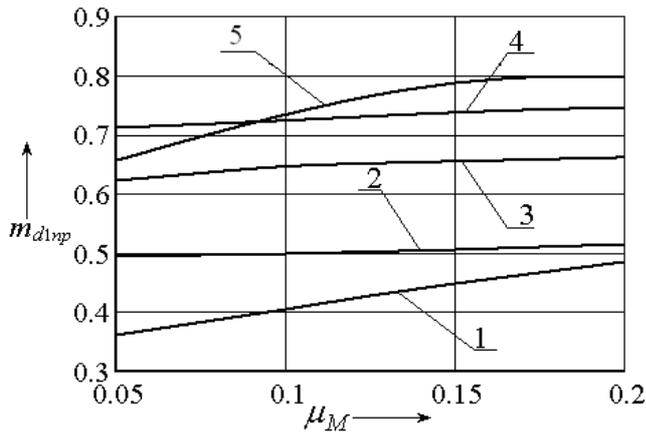


Рисунок 2.19 - Графические зависимости изменения m_{d1np} от μ_j для алюминиевого сплава А5М ($q = 10 \text{ Ìä}$; $s_0 = 3,5 \text{ ì}$; $\bar{R}_j = 12$; $D_0 = 400 \text{ ì}$)

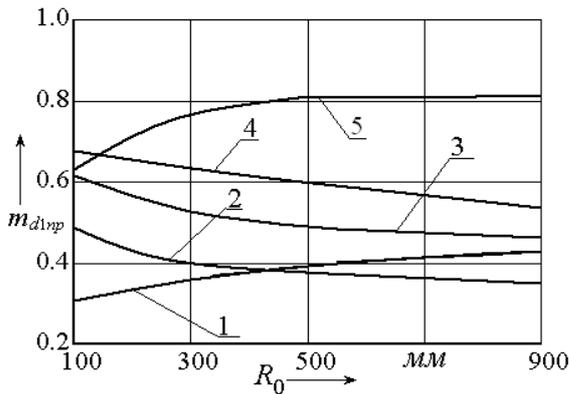


Рисунок 2.20 - Графические зависимости изменения m_{d1np} от радиуса заготовки R_0 для титанового сплава ПТ-3Вкт ($q = 10 \text{ Ìä}$; $\mu_j = 0,05$; $s_0 = 3,5 \text{ ì}$; $\bar{R}_j = 12$)

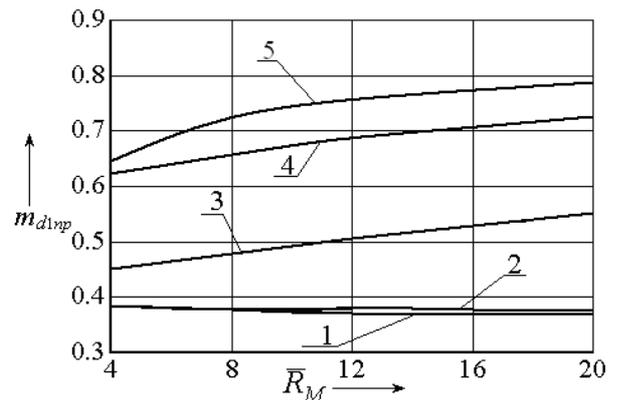


Рисунок 2.21 - Графические зависимости изменения m_{d1np} от \bar{R}_j для титанового сплава ПТ-3Вкт ($q = 10 \text{ Ìä}$; $\mu_j = 0,05$; $s_0 = 3,5 \text{ ì}$; $D_0 = 800 \text{ ì}$)

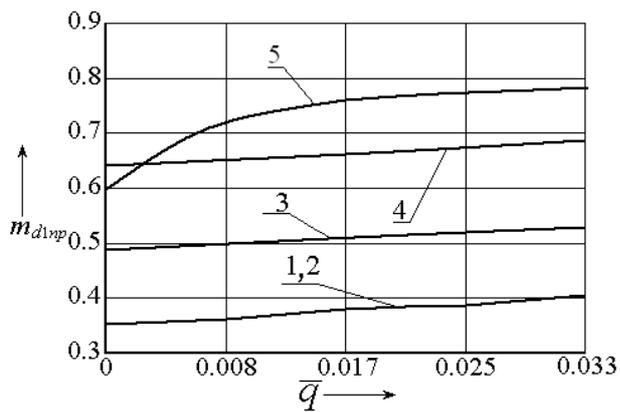


Рисунок 2.22 - Графические зависимости изменения m_{d1np} от \bar{q} для титанового сплава ПТ-3Вкт ($q = 10 \text{ МПа}$; $s_0 = 3,5 \text{ мм}$; $\bar{R}_M = 12$; $D_0 = 800 \text{ ì}$)

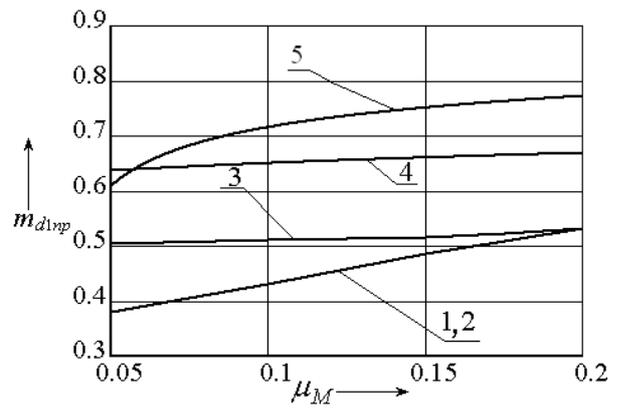


Рисунок 2.23 - Графические зависимости изменения m_{d1np} от μ_j для титанового сплава ПТ-3Вкт ($q = 10 \text{ Ìà}$; $s_0 = 3,5 \text{ ì}$; $\bar{R}_j = 12$; $D_0 = 800 \text{ ì}$)

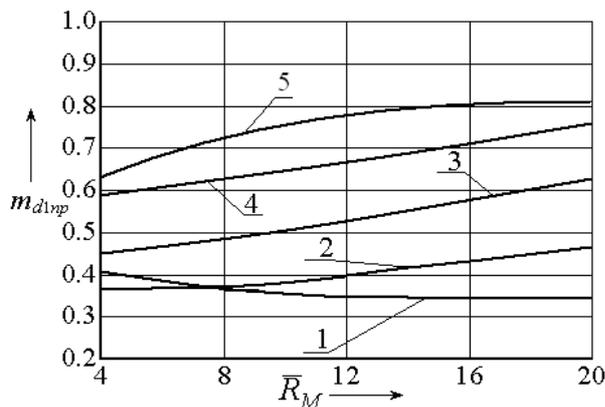


Рисунок 2.24 - Графические зависимости изменения m_{d1np} от \bar{R}_j для титанового сплава ПТ-3Вкт ($q = 10 \text{ Ìà}$; $\mu_j = 0,05$; $s_0 = 3,5 \text{ ì}$; $D_0 = 400 \text{ ì}$)

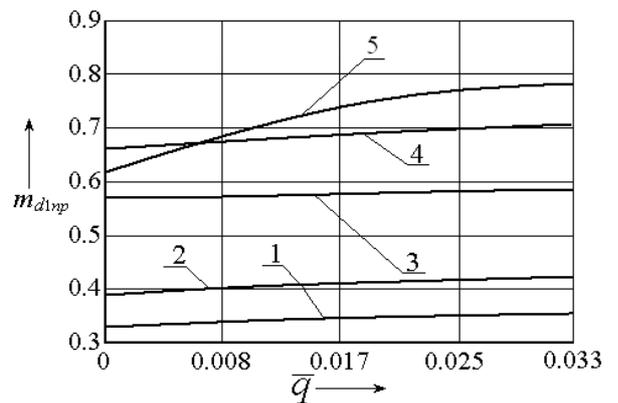


Рисунок 2.25 - Графические зависимости изменения m_{d1np} от \bar{q} для титанового сплава ПТ-3Вкт ($\mu_j = 0,05$; $s_0 = 3,5 \text{ ì}$; $\bar{R}_j = 12$; $D_0 = 400 \text{ ì}$)

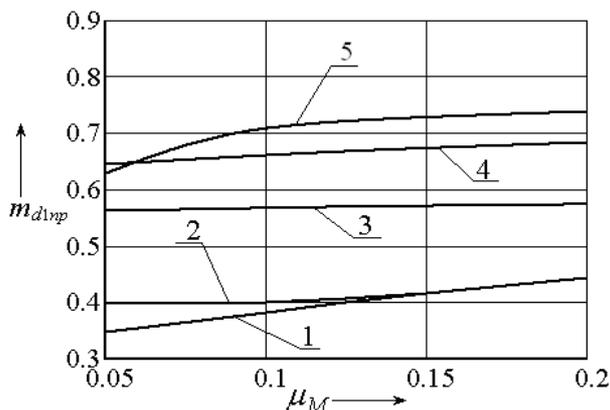


Рисунок 2.26 - Графические зависимости изменения m_{d1np} от μ_j для титанового сплава ПТ-3Вкт ($q = 10 \text{ Ìà}$; $s_0 = 3,5 \text{ ì}$; $\bar{R}_j = 12$; $D_0 = 400 \text{ ì}$)

Анализ графических зависимостей и результатов расчета показывает, что с уменьшением относительного радиуса закругления матрицы \bar{R}_M предельный коэффициент вытяжки m_{d1np} уменьшается. Видим, что с уменьшением относительной величины давления прижима $\bar{q} = q/\sigma_{0,2}$ предельный коэффициент вытяжки m_{d1np} уменьшается. Рост коэффициента трения μ_j увеличивает предельное значение коэффициента вытяжки m_{d1np} при прочих равных условиях деформирования (см. рисунки 2.13 - 2.26).

Установлено, что предельные возможности формоизменения на первой операции вытяжки цилиндрических деталей ограничиваются как первым, так и вторым критерием разрушения. Это зависит от механических свойств исходного материала и технологических параметров вытяжки.

Установлено, что предельные возможности деформирования алюминиевого сплава А5М ограничиваются допустимой величиной накопленных микрповреждений, а для титанового сплава ПТ-3Вкт – как величиной осевого напряжения на выходе из очага пластической деформации, так и допустимой величиной накопленных микрповреждений (см. рисунки 2.13 - 2.26).

2.2.4 Влияние анизотропии механических свойств на предельные возможности формоизменения

Установлено влияние анизотропии механических свойств на предельные возможности формоизменения.

На рисунках 2.27 - 2.28 представлены зависимости изменения предельных коэффициентов вытяжки m_{d1np} в зависимости от коэффициента нормальной анизотропии R при фиксированных величинах относительного радиуса закругления матрицы \bar{R}_M . Расчеты выполнены при следующих параметрах кривой упрочнения и разрушения: для материала 1 - $\sigma_{0,2} = 195,7$ МПа; $A = 277,24$ МПа; $n = 0,26$; $\Omega = 0,72$;

$U=-1,24$; для материала 2 - $\sigma_{0,2} = 600,8$ МПа; $A=502,44$ МПа; $n = 0,56$; $\Omega = 1,24$;
 $U=-1,338$.

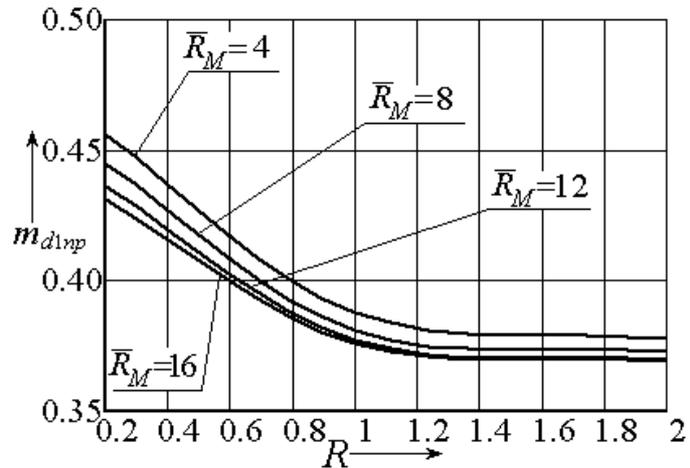


Рисунок 2.27 - Графические зависимости изменения m_{d1np} от R (материал 1)

($q=1$; $\mu_l = 0,2$; $D_0 = 250$; $s_0 = 3,5$)

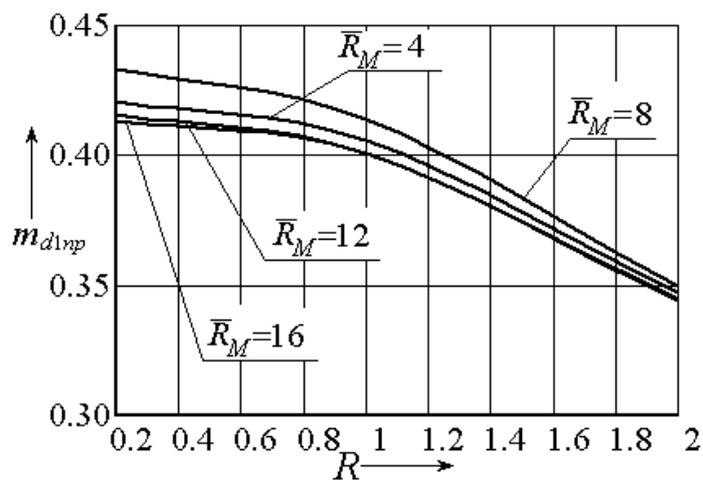


Рисунок 2.28 - Графические зависимости изменения m_{d1np} от R (материал 2)

($q=1$; $\mu_M = 0,2$; $D_0 = 250$; $s_0 = 3,5$ мм)

Анализ графических зависимостей показывает, что с ростом коэффициента нормальной анизотропии R и относительного радиуса закругления матрицы \bar{R}_M величина предельного коэффициента вытяжки m_{d1np} уменьшается. Установлено, что увеличение нормального коэффициента анизотропии R с 0,2 до 2 приводит к снижению значения предельного коэффициента вытяжки m_{d1np} в 1,25 раза.

3 Теоретические исследования последующих операций вытяжки ступенчатых осесимметричных деталей из анизотропного материала

В ракетно-космической отрасли широкое распространение имеют цилиндрические изделия (цельнотянутые осесимметричные оболочки емкостей, сосуды высокого давления и т.д.), которые получают методами глубокой вытяжки.

Качественная штамповка тонкостенных полусферических днищ с минимальным утонением и отсутствием гофр представляет весьма сложную технологическую проблему. Для изготовления таких деталей как правило, применяют реверсивный метод штамповки, который имеет существенные недостатки вследствие значительного утонения днища, наличия гофр и высокого процента брака по разрывам. Высокие требования надежности и массы конструкций обусловили необходимость поиска и разработки новых методов штамповки тонкостенных сферических днищ.

На ЗАО «ЗЭМ РКК «Энергия» им. С.П. Королева» был разработан и внедрен принципиально новый технологический процесс штамповки-вытяжки тонколистовых (1...4 мм) осесимметричных деталей типа днищ с применением метода ступенчатого набора металла, осуществляемый в универсальных сборных переналаживаемых штампах (УСПШ) с последующей окончательной прессовой формовкой или калибровкой взрывом.

Процесс изготовления ступенчатых деталей вытяжки состоит в том, что каждая ступень (рисунок 3.1) образуется на одной операции вытяжки [77, 126]. За каждую последующую операцию вытяжки получают цилиндрический участок с диаметром, равным диаметру следующей ступени. Размеры очага пластической деформации переменны по ходу перемещения пуансона и достигают наибольших размеров в конце деформирования.

Рассмотрим многооперационную вытяжку ступенчатых осесимметричных деталей из анизотропного материала.

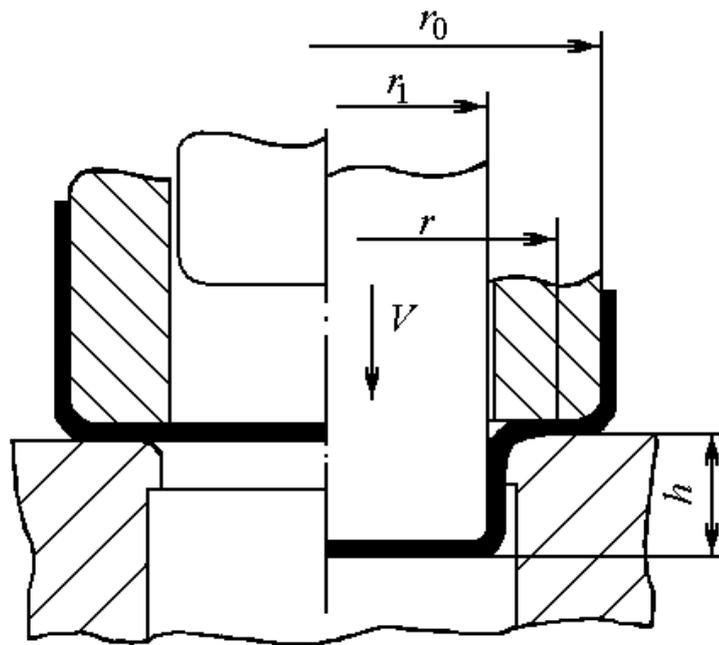


Рисунок 3.1 - Схема вытяжки

Теоретические исследования силовых и деформационных параметров многооперационной вытяжки ступенчатых осесимметричных деталей из изотропного и анизотропного, неупрочняющегося и упрочняющегося материалов выполнены в работах [1, 77, 97, 100, 112, 126, 127].

Ниже приведены результаты теоретических исследований напряженного и деформированного состояний, силовых режимов и предельных возможностей формоизменения многооперационной вытяжки ступенчатых осесимметричных деталей из трансверсально-изотропного упрочняющегося материала через радиальную матрицу.

3.1 Математическая модель многооперационной вытяжки ступенчатых осесимметричных деталей из кристаллических анизотропных материалов

Рассмотрим вопрос о распределении напряжений на последующих операциях вытяжки ступенчатой детали на заключительном этапе деформирования в радиальной матрице (рисунок 3.2) с коэффициентом вытяжки $m_d = r_n / r_{n-1}$.

На заключительном этапе деформирования очаг пластической деформации состоит из трех участков: торообразного (участок 1), контактирующего со скругленной кромкой прижима, плоского (участок 2) в промежутке между торообразными участками и торообразного (участок 3), контактирующего со скругленной кромкой матрицы.

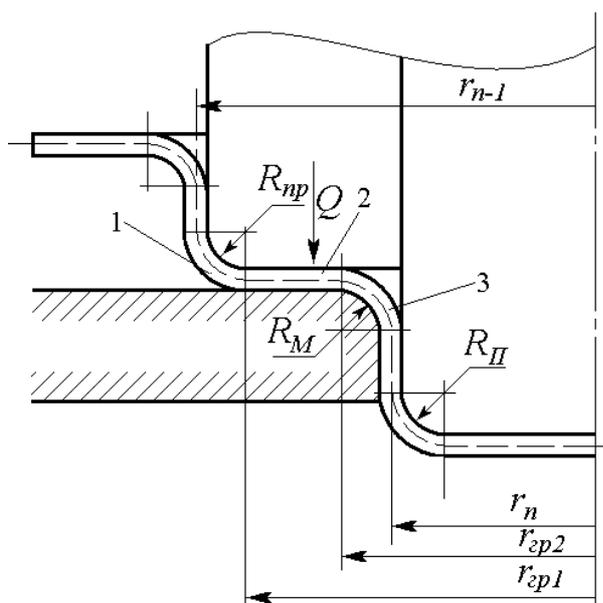


Рисунок 3.2 - Схема к анализу напряженного состояния заготовки при вытяжке ступенчатых деталей

Материал заготовки принимаем несжимаемым, трансверсально-изотропным, подчиняющимся условию пластичности Мизеса - Хилла (2.1) и ассоциированному закону пластического течения (2.2).

Меридиональные σ_r и окружные σ_θ напряжения на участке 1 определяются путем решения приближенного уравнения равновесия [126]

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r \left(1 + \frac{r ds}{s dr} \right) - \sigma_\theta = 0 \quad (3.1)$$

совместно с условием пластичности [175]

$$\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 - \frac{2R}{1+R} \sigma_r \sigma_\theta = \sigma_s^2 \quad (3.2)$$

при граничном условии, учитывающем влияние изгиба заготовки на кромке прижима:

$$r = r_{n-1} \quad \sigma_r = \sigma_s \frac{s_0}{4R_{\text{пр}}^c}, \quad (3.3)$$

где R - коэффициент нормальной анизотропии; σ_s - величина сопротивления материала пластическому деформированию на рассматриваемом участке деформирования; r_{n-1} и s_0 - радиус по срединной поверхности и толщина заготовки на предыдущей $(n-1)$ операции; $R_{\text{пр}}^c = R_{\text{пр}} + 0,5s_0$; $R_{\text{пр}}$ - радиус закругления прижима.

Рассмотрим кинематическое и деформированное состояния материала на этом участке. Скорости деформации в меридиональном, тангенциальном направлениях и по толщине определяются по выражениям

$$\xi_r = \frac{dV_r}{dr}; \quad \xi_\theta = \frac{V_r}{r}; \quad \xi_z = \frac{\dot{s}}{s}, \quad (3.4)$$

где V_r - меридиональная скорость течения.

Используя уравнение несжимаемости $\xi_r + \xi_\theta + \xi_z = 0$ и уравнения связи скоростей деформаций и напряжений, найдем

$$\frac{dV_r}{dr} = -\frac{V_r}{r}(1+f); \quad f = -\frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{\sigma_\theta(1+R) - R\sigma_r}. \quad (3.5)$$

Уравнение для определения изменения толщины заготовки запишется как

$$\frac{ds}{s} = \frac{dr}{r} f. \quad (3.6)$$

Принимая во внимание выражение (3.6), получим уравнение равновесия (3.1) в виде:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r(1+f) - \sigma_\theta}{r} = 0. \quad (3.7)$$

Интегрирование этого уравнения выполняем численно методом конечных разностей от краевой части заготовки, где известны все входящие в уравнение величины,

$$\sigma_{r_n} = \sigma_{r_{n-1}} - \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n-1}} \left[\sigma_{r_{n-1}}(1 + f) + \sigma_{\theta_{n-1}} \right]. \quad (3.8)$$

После определения σ_{r_n} находим σ_{θ_n} из условия пластичности (3.53) с учетом (3.3).

Распределение напряжений σ_r и σ_θ на плоском участке 2 находится путем интегрирования уравнения равновесия (3.8) с условием пластичности (3.2) при граничном условии:

$$\text{при } r = r_{\text{Гр1}} \quad \sigma_r = \sigma_r(r_{\text{Гр1}}) + \frac{\mu_M Q}{\pi r_{\text{Гр1}} s} + \sigma_s \Big|_{r=r_{\text{Гр1}}} \frac{s}{4R_{\text{пр}}^c}, \quad (3.9)$$

где Q - сила прижима; $r_{\text{Гр1}} = r_{n-1} - R_{\text{пр}}^c$; $Q = \pi(r_{n-1}^2 - r_{\text{зп2}}^2)q$; q - давление прижима [133]; $\sigma_s \Big|_{r=r_{\text{Гр1}}}$ - сопротивление материала деформированию при $r = r_{\text{зп1}}$; μ - коэффициент трения на контактной поверхности заготовки и рабочего инструмента; $r_{\text{Гр2}} = r_n + R_{\text{м}}^c$; $R_{\text{м}}^c = R_{\text{м}} + 0,5s$; $r_{\text{Гр1}} \leq r \leq r_{\text{Гр2}}$. Остальные величины ясны из рисунка 3.2.

Уравнения для определения меридиональных скоростей, толщины заготовки и меридионального напряжения σ_{r_n} в данном случае будут иметь вид аналогичный выражениям (3.5), (3.6) и (3.8).

Величина окружного напряжения σ_{θ_n} вычисляется из условия пластичности (3.8).

При анализе процесса вытяжки без прижима в граничном условии (3.9) необходимо принять $Q = 0$.

Для нахождения меридионального σ_r и окружного σ_θ напряжений на тороидальной поверхности матрицы (участок 3) решаем совместно уравнение равновесия [175]

$$\frac{d\sigma_r}{d\varphi} - \sigma_r \left(\frac{\cos\varphi}{a - \sin\varphi} + \mu_M + \frac{ds}{s d\varphi} \right) + \sigma_\theta \frac{\cos\varphi + \mu_M \sin\varphi}{a - \sin\varphi} = 0 \quad (3.10)$$

и условие пластичности (3.53) при граничном условии

$$\text{при } \varphi = 0 \quad \sigma_r = \sigma_r(r_{2p2}) + \sigma_s|_{r=r_{2p2}} \cdot \frac{s}{4R_{MC}}, \quad (3.11)$$

где φ - угол, характеризующий положение рассматриваемого сечения заготовки на тороидальной поверхности матрицы; $a = r_{2p2} / R_{MC}$; $R_{MC} = R_M + 0,5s$;

$\sigma_s|_{r=r_{2p2}} \cdot \frac{s}{4R_{MC}}$ - сопротивление материала деформированию при $r = r_{2p2}$;

$\sigma_r(r_{2p2})$ - величина меридионального напряжения на участке 2, вычисленная при $\rho = r_{2p2}$.

Уравнения для определения меридиональных скоростей и толщины будут иметь вид

$$\frac{dV_r}{d\varphi} = \frac{V_r \cos \varphi}{a - \sin \varphi} (1 + f); \quad \frac{ds}{s} = - \frac{\cos \varphi d\varphi}{a - \sin \varphi} f. \quad (3.12)$$

Учитывая выражение (3.12), получим уравнение равновесие (3.10) в виде:

$$\frac{d\sigma_r}{d\varphi} - \sigma_r \left(\frac{\cos \varphi}{a - \sin \varphi} + \mu_M - f \frac{\cos \varphi}{a - \sin \varphi} \right) + \sigma_\theta \frac{\cos \varphi + \mu_M \sin \varphi}{a - \sin \varphi} = 0. \quad (3.13)$$

Интегрирование этого уравнения выполняем численно методом конечных разностей при граничном условии (3.11) следующим образом:

$$\sigma_{r_n} = \sigma_{r_{n-1}} + \left\{ \sigma_{r_{n-1}} \left[\frac{(1 - f_{n-1}) \cos \varphi_{n-1}}{a - \sin \varphi_{n-1}} + \mu_M \right] - \sigma_{\theta_{n-1}} \frac{\cos \varphi_{n-1} + \mu_M \sin \varphi_{n-1}}{a - \sin \varphi_{n-1}} \right\} \Delta \varphi. \quad (3.14)$$

Максимальная величина меридионального напряжения $\sigma_{r \max}$ соответствует $\varphi = \pi/2$.

Величина силы процесса находится по формуле

$$P = 2\pi r_n s \sigma_{r \max} |_{\varphi=\pi/2}. \quad (3.15)$$

Рассмотрим деформированное состояние заготовки. Величина приращения окружной деформации $d\varepsilon_\theta$ находится по выражениям

$$d\varepsilon_\theta = \frac{dr}{r},$$

где ρ - координата рассматриваемого сечения очага деформации.

Приращения меридиональных деформаций $d\varepsilon_r$ и деформаций по толщине заготовки $d\varepsilon_z$ могут быть определены с учетом ассоциированного закона пластического течения (2.2) следующим образом:

$$d\varepsilon_z = -d\varepsilon_\theta \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{\sigma_\theta(1+R) - R\sigma_r}; \quad d\varepsilon_r = -(d\varepsilon_\theta + d\varepsilon_z).$$

Величина приращения интенсивности деформации $d\varepsilon_i$ определяется по формуле [159]

$$d\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2(2+R)}}{\sqrt{3}(2R+1)} \left\{ R(d\varepsilon_r - d\varepsilon_\theta)^2 + [d\varepsilon_\theta(1+R) + Rd\varepsilon_r]^2 + [d\varepsilon_r(1+R) + Rd\varepsilon_\theta]^2 \right\}^{1/2},$$

далее вычисляется величина интенсивности деформации.

Для учета упрочнения материала воспользуемся зависимостью

$$\sigma_s = \sigma_{0,2} + A(\varepsilon_i)^n,$$

где $\sigma_{0,2}$ - условный предел текучести; A и n - характеристики кривой упрочнения материала.

Изменение толщины заготовки в процессе вытяжки ступенчатых деталей оценивалось по соотношению

$$\ln \frac{s}{s_0} = - \int_{r_{n-1}}^r \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{\sigma_r R - \sigma_\theta(1+R)} \frac{dr}{r}. \quad (3.16)$$

Приведенные выше соотношения позволяют определить напряженное и деформированное состояния заготовки, силовые режимы последующих операций многоступенчатой вытяжки.

3.2. Установление влияния анизотропии механических свойств исходных материалов, технологических параметров на силовые режимы, предельные возможности формоизменения и формирование показателей качества изготавливаемых осесимметричных деталей

3.2.1 Напряжения и сила

Силовые режимы последующих операций многоступенчатой вытяжки исследовались в зависимости от коэффициента вытяжки m_d , радиусов закругления прижима R_{np} и матрицы R_M , условий трения на контактных границах рабочего инструмента и заготовки μ_j и величины давления прижима q для титанового сплава ПТ-3Вкт и алюминиевого сплава А5М, механические свойства которого приведены в разд. 3.1.

Рассматривались два этапа деформирования заготовки: первый этап – совпадение центра закругления пуансона с верхней кромкой матрицы и последующий этап деформирования заготовки до определенной высоты цилиндрической части заготовки меньшего диаметра.

Расчеты выполнены в следующих диапазонах изменения технологических параметров процесса: $m_d = m_{d\text{inp}} \dots 0,9$; $\bar{R}_M = \bar{R}_{np} = 2 \dots 20$; $\mu_j = 0,01 \dots 0,3$; $q = 0 \dots 10$ МПа; $\bar{R}_{np} = R_{np} / s_0$; $\bar{R}_M = R_M / s_0$; $m_{d\text{inp}}$ - предельный коэффициент вытяжки.

Геометрические размеры изготавливаемой детали принимались: для титанового сплава ПТ-3Вкт при $r_n = 949,5$ мм; $s_0 = 3,5$ мм, для алюминиевого сплава А5М при $r_n = 560,5$ мм; $s_0 = 3,5$ мм, применительно к изготовлению полусферических тонкостенных деталей (см. разд. 7).

На рисунках 3.3 - 3.10 приведены зависимости изменения относительных величин сил $\bar{P} = P / (2\pi r_n s_0 \sigma_{0,2})$ от коэффициента вытяжки m_{di} , относительной величины радиусов закругления прижима и матрицы $\bar{R}_{np} = \bar{R}_M$, относительной величины давления прижима $\bar{q} = q / \sigma_{0,2}$, коэффициента трения μ_j для титанового

ПТ-3Вкт и алюминиевого А5М сплавов соответственно. Здесь H - высота цилиндрической части детали.

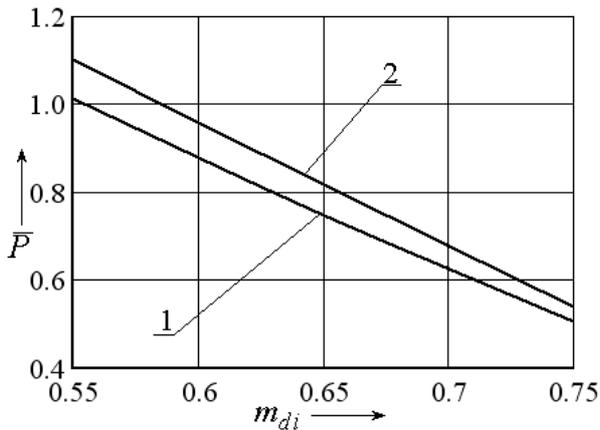


Рисунок 3.3 - Графические зависимости изменения \bar{P} от m_{di} для титанового сплава ПТ-3Вкт: кривая 1 - $H = 0$ мм; кривая 2 - $H = 150$ мм ($\bar{R}_l = \bar{R}_{i\delta} = 11,5$; $\mu_l = 0,05$)

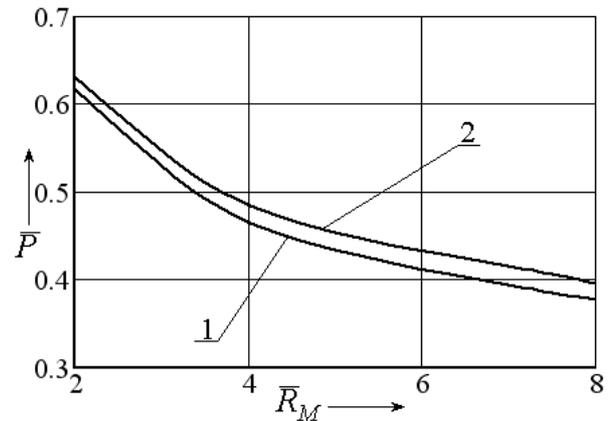


Рисунок 3.4 - Графические зависимости изменения \bar{P} от $\bar{R}_{np} = \bar{R}_M$ для титанового сплава ПТ-3Вкт: кривая 1 - $H = 0$ мм; кривая 2 - $H = 150$ мм ($m_{di} = 0,826$; $q = 10$ МПа; $\mu_l = 0,05$)

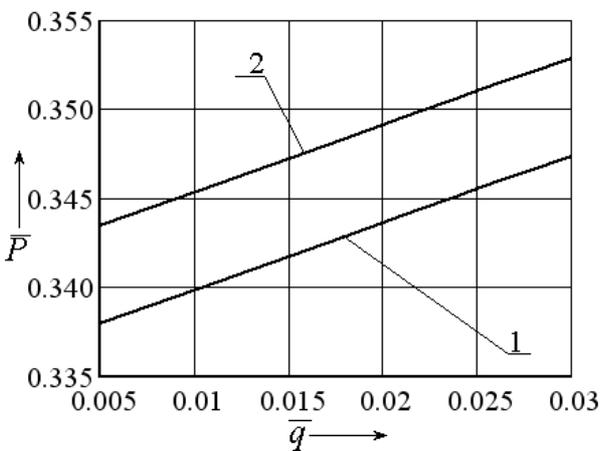


Рисунок 3.5 - Графические зависимости изменения \bar{P} от \bar{q} для титанового сплава ПТ-3Вкт: кривая 1 - $H = 0$ мм; кривая 2 - $H = 150$ мм ($m_{di} = 0,826$; $\bar{R}_l = \bar{R}_{i\delta} = 11,5$; $\mu_l = 0,05$)

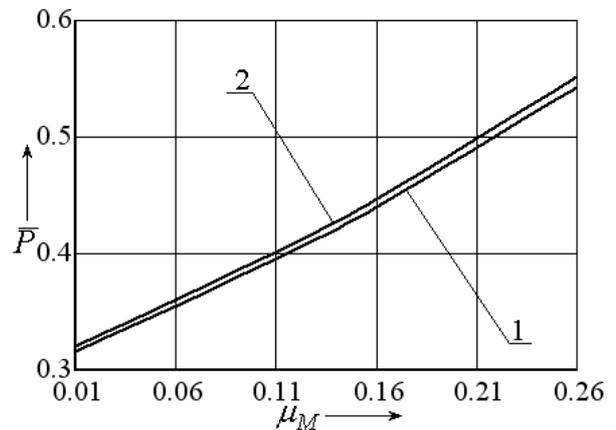


Рисунок 3.6 - Графические зависимости изменения \bar{P} от μ_l для титанового сплава ПТ-3Вкт: кривая 1 - $H = 0$ мм; кривая 2 - $H = 150$ мм ($m_{di} = 0,826$; $\bar{R}_l = \bar{R}_{i\delta} = 11,5$)

Следует заметить, что при вытяжке без утонения стенки относительные величины \bar{P} и $\bar{\sigma}_p$ на выходе из очага пластической деформации равны: $\bar{P} = \bar{\sigma}_p$ ($\bar{\sigma}_p = \sigma_p / \sigma_{0,2}$).

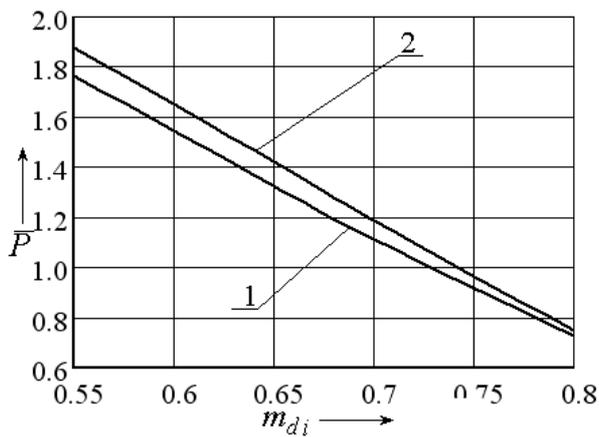


Рисунок 3.7 - Графические зависимости изменения \bar{P} от m_{di} для алюминиевого сплава А5М:
 кривая 1 - $H = 0$ мм;
 кривая 2 - $H = 55$ мм
 ($\bar{R}_j = \bar{R}_{i\delta} = 6$; $\mu_j = 0,05$)

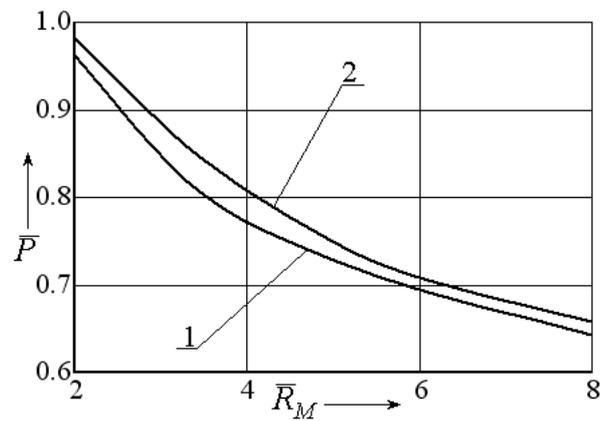


Рисунок 3.8 - Графические зависимости изменения \bar{P} от $\bar{R}_{np} = \bar{R}_M$ для алюминиевого сплава А5М: кривая 1 - $H = 0$ мм;
 кривая 2 - $H = 55$ мм
 ($m_{di} = 0,826$; $q = 10$ МПа; $\mu_j = 0,05$)

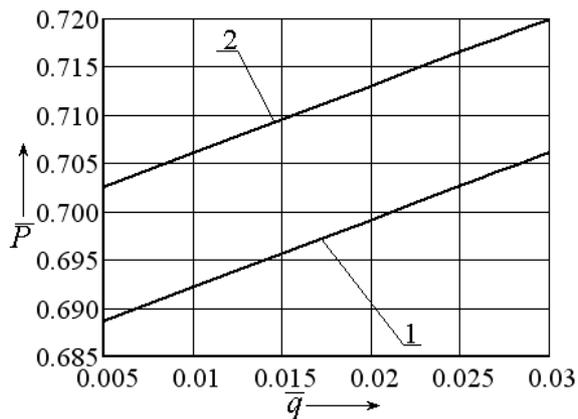


Рисунок 3.9 - Графические зависимости изменения \bar{P} от \bar{q} для алюминиевого сплава А5М:
 кривая 1 - $H = 0$ мм;
 кривая 2 - $H = 55$ мм
 ($m_{di} = 0,826$; $\bar{R}_j = \bar{R}_{i\delta} = 6$; $\mu_j = 0,05$)

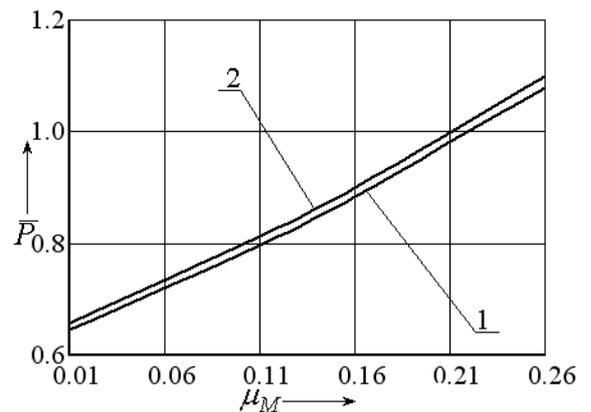


Рисунок 3.10 - Графические зависимости изменения \bar{P} от μ_j для алюминиевого сплава А5М:
 кривая 1 - $H = 0$ мм;
 кривая 2 - $H = 55$ мм
 ($m_{di} = 0,826$; $\bar{R}_j = \bar{R}_{i\delta} = 6$)

Анализ графических зависимостей показывает, что относительная величина силы процесса \bar{P} с уменьшением коэффициента вытяжки m_{di} , радиусов закругления прижима и матрицы $\bar{R}_{np} = \bar{R}_M$, ростом коэффициента трения на контактных границах рабочего инструмента и заготовки μ_j и величины давления прижима q возрастает.

Максимальная величина силы процесса соответствует определенной величине перемещения пуансона, связи с перетяжкой части высоты предыдущей заготовки через кромку закругления прижима, а также вовлечения в процесс пластического деформирования большей части материала, находящегося в недеформированной части заготовки (стенки).

3.2.2 Предельные возможности формоизменения

Предельные возможности процесса вытяжки ступенчатых деталей ограничиваются максимальной величиной осевого напряжения $\sigma_{r \max}$ в стенке изделия на выходе из очага деформации, которая не должна превышать величины сопротивления материала пластическому деформированию в условиях плоского напряженного состояния с учетом упрочнения

$$\sigma_{r \max} \leq \sigma_{sr}^*, \quad \sigma_{sr}^* = \sigma_s, \quad (3.17)$$

допустимой степенью использования ресурса пластичности

$$\omega_e = \int_0^{\varepsilon_i} \frac{d\varepsilon_i}{\varepsilon_{i np}} \leq \chi, \quad (3.18)$$

где $\varepsilon_{i np} = \varepsilon_{i np}(\sigma/\sigma_i)$ - предельная интенсивность деформации; σ - среднее напряжение; $\sigma = (\sigma_r + \sigma_\theta)/3$;

$$\sigma_i = \left\{ \frac{3}{2} [R(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + \sigma_\theta^2 + \sigma_r^2] / (2 + R) \right\}^{1/2}.$$

В зависимости от условий эксплуатации или последующей обработки изготавливаемого изделия уровень повреждаемости не должен превышать величины χ . До деформации $\omega_e = 0$, а в момент разрушения $\omega_e = \chi = 1$. При назначении величин степеней деформации в процессе пластического формоизменения следует учитывать рекомендации по степени использования запаса пластичности В.Л. Колмогорова и А.А. Богатова, согласно которым для ответственных деталей, работающих и подвергающихся после обработки давлением термической обработке (отжигу или закалке), допустимой величиной степени использования запаса

пластичности следует считать $\chi = 0,25$, а для неответственных деталей допустимая степень использования запаса пластичности может быть принята $\chi = 0,65$ [10, 11, 62-64].

Величина предельной интенсивности деформации $\varepsilon_{i\ddot{\delta}}$ находится по выражению (2.29).

На рисунках 3.11 – 3.16 представлены графические зависимости изменения предельного коэффициента вытяжки $m_{d\ddot{\delta}}$ от относительной величины радиусов закругления прижима и матрицы $\bar{R}_{np} = \bar{R}_M$, относительной величины давления прижима прижимы \bar{q} , коэффициента трения μ_j для титанового ПТ-3кт и алюминиевого А5М сплавов на последующей операции ступенчатой вытяжки при высоте цилиндрической части детали $H = 0$ мм соответственно.

Кривые 1, 2, 3 и 4 соответствуют величинам коэффициентов вытяжки $m_{d\ddot{\delta}}$, вычисленным по максимальной величине напряжения в стенке детали на выходе из очага деформации и по допустимой величине накопленных микрповреждений при $\chi = 1$, $\chi = 0,65$ и $\chi = 0,25$ соответственно. Положения кривых 3 - 4 определяют возможности деформирования заготовки в зависимости от технических требований на изделие. Положения кривых 1 и 2 указывают на возможность разрушения заготовки по условиям (3.17) и (3.18).

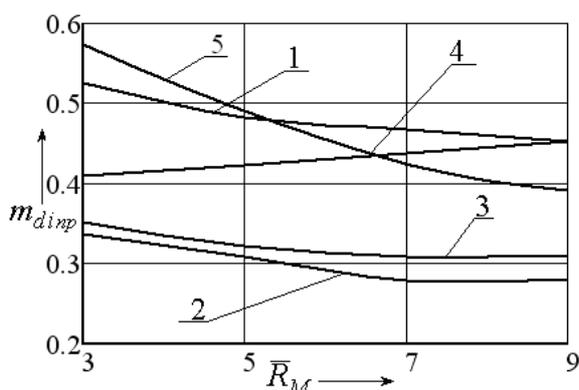


Рисунок 3.11 - Графические зависимости изменения $m_{d\ddot{\delta}}$ от $\bar{R}_{np} = \bar{R}_M$ для титанового сплава ПТ-3Вкт ($\bar{R}_j = \bar{R}_{i\ddot{\delta}} = 11,5$; $\mu_j = 0,05$)

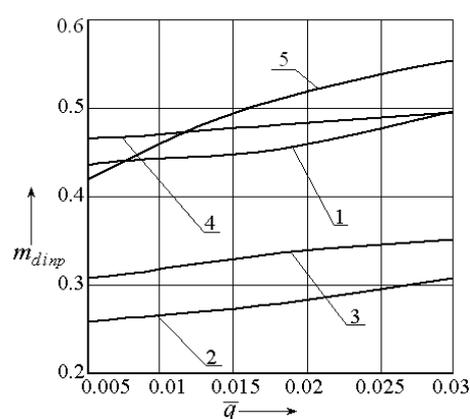


Рисунок 3.12 - Графические зависимости изменения $m_{d\ddot{\delta}}$ от q для титанового сплава ПТ-3Вкт ($\bar{R}_j = \bar{R}_{i\ddot{\delta}} = 11,5$; $\mu_j = 0,05$)

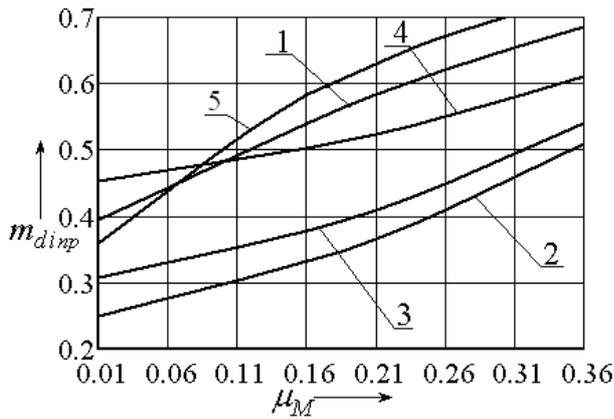


Рисунок 3.13 - Графические зависимости изменения $m_{dii\delta}$ от μ_j для титанового сплава ПТ-3Вкт: ($\bar{R}_j = \bar{R}_{i\delta} = 11,5$; $q=10$ МПа)

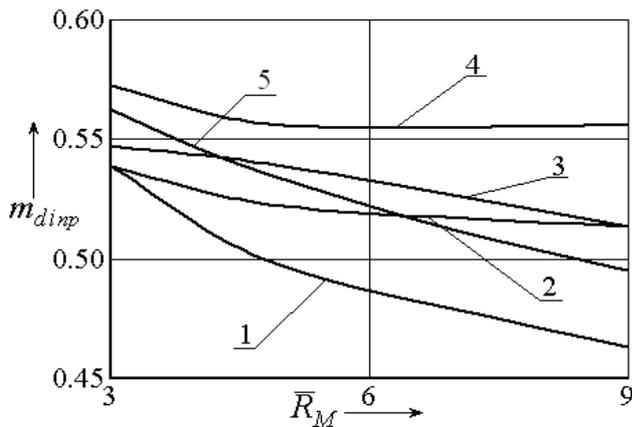


Рисунок 3.14 - Графические зависимости изменения $m_{dii\delta}$ от $\bar{R}_{np} = \bar{R}_M$ для алюминиевого сплава А5М ($q=10$ МПа; $\mu_j = 0,05$)

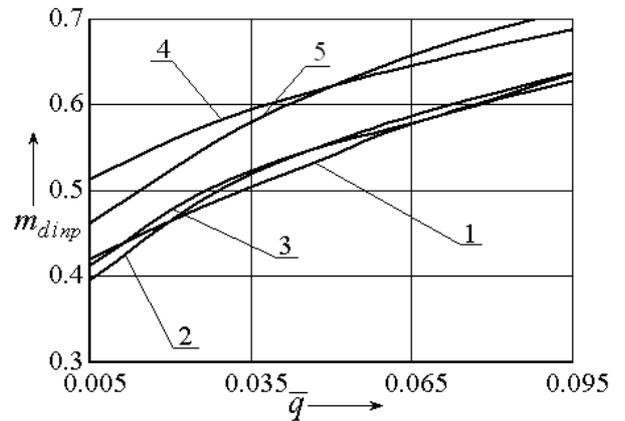


Рисунок 3.15 - Графические зависимости изменения $m_{dii\delta}$ от \bar{q} для алюминиевого сплава А5М ($\bar{R}_j = \bar{R}_{i\delta} = 6$; $\mu_j = 0,05$)

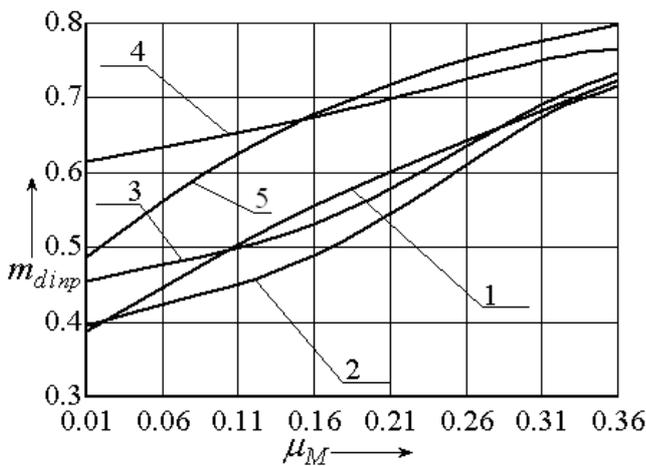


Рисунок 3.16 - Графические зависимости изменения m_{dini} от μ_M для алюминиевого сплава А5М ($\bar{R}_j = \bar{R}_{i\delta} = 6$; $q=10$ МПа)

Графические зависимости изменения предельного коэффициента вытяжки $m_{dii\delta}$ от относительной величины радиусов закругления прижима и матрицы

$\bar{R}_{np} = \bar{R}_M$, относительной величины давления прижима \bar{q} , коэффициента трения μ_M для титанового сплава ПТ-3Вкт ($H = 150$ мм) на последующей операции ступенчатой вытяжки приведены на рис. 3.17 – 3.50 соответственно.

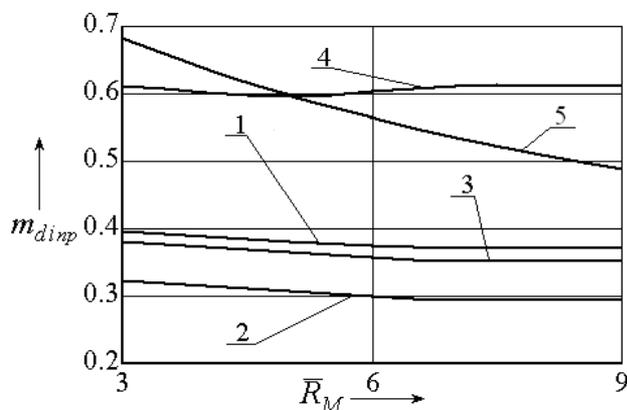


Рисунок 3.17 - Графические зависимости изменения m_{dini} от $\bar{R}_{np} = \bar{R}_M$ для титанового сплава ПТ-3Вкт ($q = 10$ МПа; $\mu_M = 0,05$)

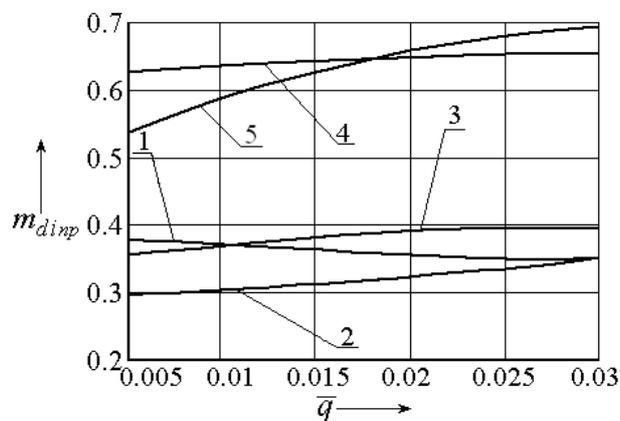


Рисунок 3.18 - Графические зависимости изменения m_{dini} от q для титанового сплава ПТ-3Вкт ($\bar{R}_M = \bar{R}_{np} = 11,5$; $\mu_M = 0,05$)

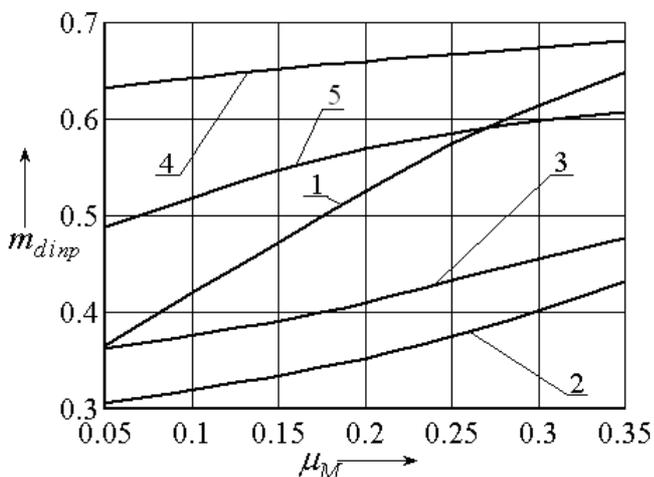


Рисунок 3.19 - Графические зависимости изменения m_{dini} от μ_M для титанового сплава ПТ-3Вкт ($\bar{R}_M = \bar{R}_{np} = 11,5$; $q = 10$ МПа)

Анализ графиков и результатов расчета показывает, что предельные возможности формоизменения на последующих переходах многооперационной вытяжки ступенчатых осесимметричных деталей ограничиваются как первым, так и вторым критерием разрушения. Это зависит от механических свойств исходного материала, технологических параметров, геометрии рабочего инструмента (\bar{R}_M и \bar{R}_{np}) и величины давления прижима q . Например, установлено, что предельные

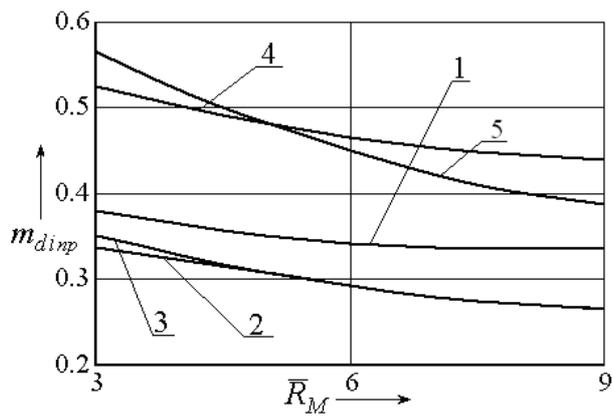
возможности деформирования на последующих операциях вытяжки алюминиевого сплава А5М ограничиваются допустимой величиной накопленных микрповреждений (см. рисунок 3.14), а для титанового сплава ПТ-3Вкт – величиной осевого напряжения на выходе из очага пластической деформации (рисунок 3.11).

Относительная величина давления прижима \bar{q} оказывает влияние на предельные возможности деформирования. Установлено, что с уменьшением относительной величины давления прижима $\bar{q} = q/\sigma_{0,2}$ предельный коэффициент вытяжки $m_{d\text{inp}}$ уменьшается. Увеличение \bar{q} от 0,005 до 0,095 приводит к росту $m_{d\text{inp}}$ на 30...40 % для алюминиевого сплава А5М (см. рисунок 3.15).

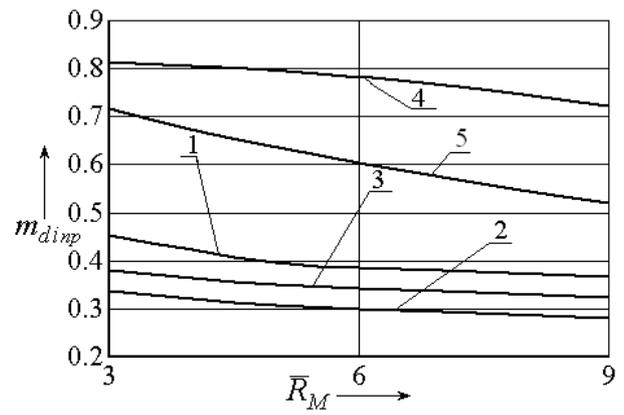
Установлено, что с увеличением относительных радиусов закругления прижима и матрицы $\bar{R}_M = \bar{R}_{np}$ предельный коэффициент вытяжки $m_{d\text{inp}}$ уменьшается.

Показано, что изменение условий трения на контактной поверхности матрицы оказывает влияние на предельный коэффициент вытяжки $m_{d\text{inp}}$. Рост коэффициента трения μ_M приводит к увеличению предельного значения коэффициента вытяжки $m_{d\text{inp}}$ на 42 % при прочих равных условиях деформирования (см. рисунок 3.13 и 3.16).

Графические зависимости изменения предельного коэффициента вытяжки $m_{d\text{ii}\delta}$ на втором переходе вытяжки (без отжига) от относительных радиусов закругления прижима и матрицы $\bar{R}_{np} = \bar{R}_M$ при $H = 0$ мм и $H = 150$ мм ($q = 5$ МПа; $\mu_M = 0,05$) приведены на рисунке 3.20, на рисунке 3.21 - от величины давления прижима \bar{q} ($\bar{R}_M = \bar{R}_{np} = 14,5$; $\mu_M = 0,05$) для титанового сплава ПТ-3Вкт.

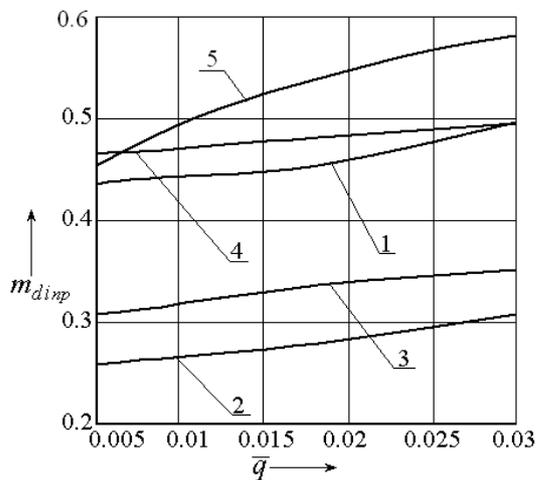


а

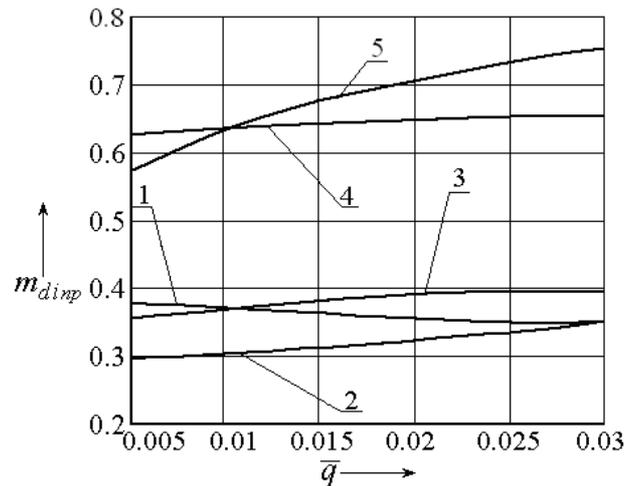


б

Рисунок 3.20 - Графические зависимости изменения m_{dini} от $\bar{R}_{np} = \bar{R}_M$ для титанового сплава ПТ-3Вкт ($q = 5$ МПа; $\mu_M = 0,05$):
а - $H = 0$ мм; б - $H = 150$ мм



а



б

Рисунок 3.21 - Графические зависимости изменения m_{dini} от \bar{q} для титанового сплава ПТ-3Вкт ($\bar{R}_M = \bar{R}_{np} = 11,5$; $\mu_M = 0,05$):
а - $H = 0$ мм; б - $H = 150$ мм

Анализ графических зависимостей показывает, что с увеличением высоты H цилиндрической части детали степень использования ресурса пластичности χ существенно возрастает, что необходимо учитывать при проектировании технологических процессов многооперационной вытяжки ступенчатых осесимметричных деталей.

Таким образом, при проектировании технологических процессов изготовления полуфабрикатов для изготовления полусферических деталей необходимо использовать рекомендации В.Л. Колмогорова и А.А. Богатова, согласно которым для ответственных деталей, работающих и подвергающихся после обработки давлением термической обработке (отжигу или закалке), допустимой величиной степени использования запаса пластичности следует считать $\chi = 0,25$.

Приведенные выше соотношения могут быть использованы для анализа напряженного и деформированного состояний, силовых режимов и предельных возможностей формоизменения многооперационной вытяжки ступенчатых осесимметричных деталей из трансверсально-изотропного материала через радиальную матрицу.

3.2.3 Влияние анизотропии механических свойств на предельные возможности формоизменения

Приведенные выше соотношения позволили установить влияние коэффициентов нормальной анизотропии механических свойств на предельные возможности формоизменения многоступенчатой вытяжки осесимметричных деталей.

Графические зависимости изменения предельных коэффициентов вытяжки m_{dinp} от коэффициента нормальной анизотропии R при различных величинах относительного радиуса закругления матрицы \bar{R}_M , равного относительному радиусу закругления прижима $\bar{R}_{i\delta}$ ($\bar{R}_M = \bar{R}_{i\delta}$), относительного давления прижима \bar{q} и коэффициента трения μ_j , представлены на рисунках 3.22 – 3.24 соответственно.

Расчеты выполнены при следующих геометрических размерах заготовки и параметрах кривой упрочнения и разрушения: $d_{i-1} = 1149,5$ мм; $s_0 = 3,5$ мм; $H = 70$ мм; $\mu_j = 0,1$; $\sigma_{0,2} = 195,7$ МПа; $A = 277,24$ МПа; $n = 0,26$; $\Omega = 0,72$; $U = -1,24$.
Здесь H - высота цилиндрической части получаемой детали на i -й операции.

Анализ графических зависимостей показывает, что с ростом коэффициента нормальной анизотропии R , относительного радиуса закругления матрицы и прижима $\bar{R}_M = \bar{R}_{i\delta}$, уменьшением коэффициента трения μ_j и относительного давления прижима \bar{q} величина предельного коэффициента вытяжки $m_{dii\delta}$ уменьшается. Показано, что с увеличением нормального коэффициента анизотропии R с 0,2 до 2 снижается величина предельного коэффициента вытяжки $m_{dii\delta}$ на 30 %.

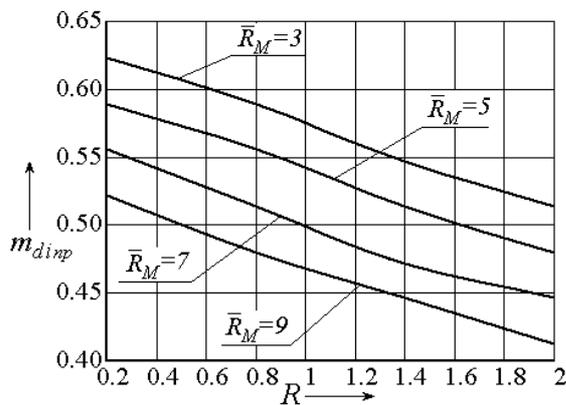


Рисунок 3.22 - Зависимости изменения m_{dini} от R

при различных величинах $\bar{R}_M = \bar{R}_{np}$
($\bar{q}=0,05$; $\mu_M=0,1$)

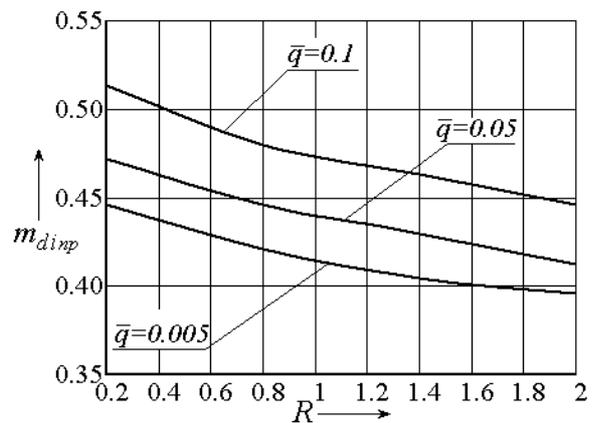


Рисунок 3.23 - Зависимости изменения m_{dini} от R

при различных величинах \bar{q}
($\bar{R}_M = \bar{R}_{np} = 11,5$; $\mu_M = 0,1$)

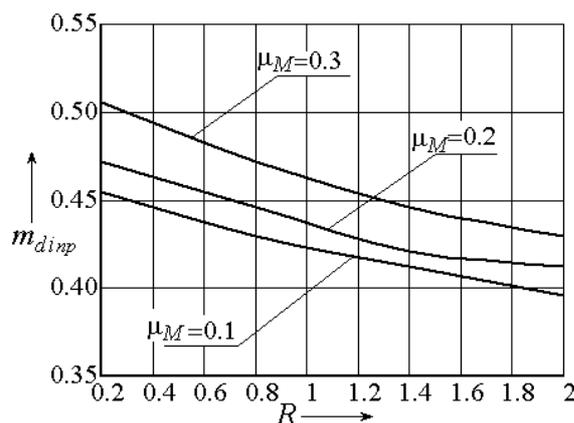


Рисунок 3.24 - Зависимости изменения m_{dini} от R

при различных значениях μ_M ($\bar{R}_M = \bar{R}_{np} = 11,5$; $\bar{q} = 0,005$)

На рисунках 3.25 – 3.27 представлены графические зависимости изменения предельных коэффициентов вытяжки m_{dini} от коэффициента нормальной

анизотропии R , вычисленных в предположении, что после i -1 операции вытяжки, выполненной при коэффициенте вытяжки $m_{di} = 0,8$ с относительными радиусами закругления матрицы и прижима $\bar{R}_M = \bar{R}_{i\delta} = 11,5$ ($H = 70$ мм; $\bar{q} = 0,05$; $\mu_j = 0,1$) межоперационный отжиг не производился. При выполнении этих расчетов учитывалась неоднородность механических свойств материала по образующей полуфабриката после предварительной операции вытяжки.

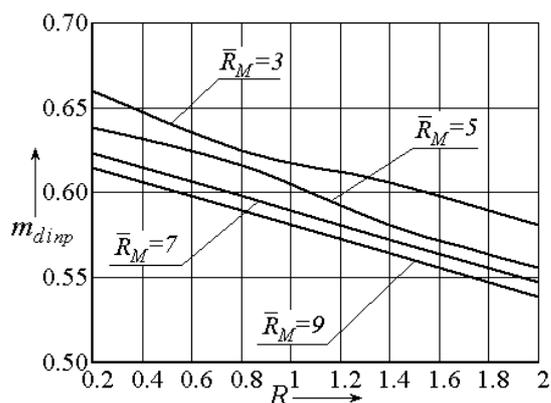


Рисунок 3.25 - Зависимости изменения m_{dini} от R при различных величинах

$$\bar{R}_M = \bar{R}_{i\delta} \quad (\bar{q} = 0,05; \mu_M = 0,1)$$

Характер влияния коэффициентов нормальной анизотропии R и технологических параметров процесса вытяжки ($\bar{R}_M = \bar{R}_{np}$, \bar{q} , μ_M) на предельные возможности формоизменения аналогичен описанному выше.

Из анализа графиков следует, что учет неоднородности механических исходного полуфабриката влияет на величины предельных коэффициентов вытяжки m_{dinp} .

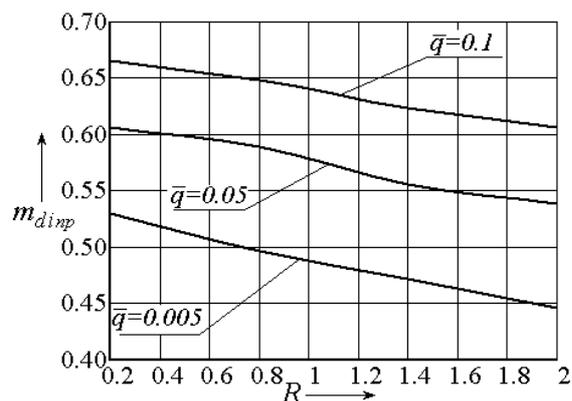


Рисунок 3.26 - Зависимости изменения m_{dini} от R при различных величинах \bar{q}

$$(\bar{R}_M = \bar{R}_{np} = 11,5; \mu_M = 0,1)$$

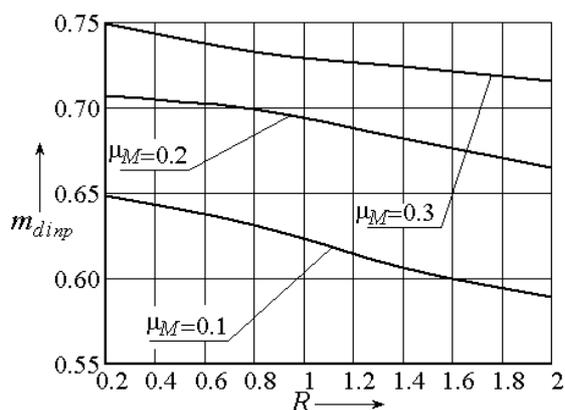


Рисунок 3.27 - Зависимости изменения m_{dini} от R при различных величинах

$$\mu_M \quad (\bar{R}_M = \bar{R}_{np} = 11,5; \bar{q} = 0,1)$$

4 Экспериментальные исследования силовых режимов вытяжки ступенчатых осесимметричных деталей из кристаллических анизотропных материалов

С целью оценки работоспособности разработанных математических моделей деформирования выполнены экспериментальные исследования силовых режимов первой и последующих операций вытяжки осесимметричных деталей в производственных условиях. Регистрация силовых режимов производилась по манометру на каждой операции технологических процессов вытяжки полусферических тонкостенных деталей из титанового сплава ПТ-3Вкт и детали «Диафрагма» из алюминиевого сплава А5М.

В таблицах 4.1 и 4.2 приведены расчетные $\bar{P}_{расч} = P_{расч} / (2\pi r_n s_0 \sigma_{0,2})$ и экспериментальные $\bar{P}_{эксп} = P_{эксп} / (2\pi r_n s_0 \sigma_{0,2})$ значения силы на операциях вытяжки полусферических тонкостенных днищ из листов титанового сплава ПТ-3Вкт ($s_0 = 3,5$ мм; $\bar{R}_M = \bar{R}_{np} = 11,5$) и детали «Диафрагма» из алюминиевого сплава А5М ($s_0 = 3,5$ мм; $\bar{R}_M = \bar{R}_{np} = 6$).

Таблица 4.1 - Расчетные и экспериментальные значения силы \bar{P} на операциях вытяжки полусферических тонкостенных деталей из титанового сплава ПТ-3Вкт

№ операции	Вид вытяжки	d_i , мм	m_{di}	Давление прижима, q , МПа	$\bar{P}_{расч}$	$\bar{P}_{эксп}$
1	Вытяжка на провал	1698,5	0,918	10,0	0,36	0,41
2		1431,5	0,843	10,0	0,45	0,51
3	Последующие операции вытяжки ступенчатых деталей	1149,5	0,803	13,0	0,42	0,48
4		949,5	0,826	7,5	0,39	0,43
5		820,5	0,864	5,0	0,33	0,37
6		690,5	0,842	5,0	0,42	0,48
7		560,5	0,811	5,0	0,49	0,55

Таблица 4.2 - Расчетные и экспериментальные величины силы \bar{P} на операциях вытяжки детали «Диафрагма» из алюминиевого сплава А5М

№ операции	Вид вытяжки	d_i , мм	m_{di}	Сила прижима, кН	$\bar{P}_{расч}$	$\bar{P}_{эксп}$
1	Вытяжка на провал	950,0	0,92	80,0	0,52	0,58
2		818,8	0,862	160,0	0,61	0,70
3	Последующие операции вытяжки ступенчатых деталей	690,8	0,844	130,0	0,59	0,68
4		560,5	0,811	110,0	0,78	0,88
5		464,0	0,828	40,0	0,70	0,81
6		408,5	0,880	20,0	0,49	0,55

Относительные величины силы $\bar{P}_{расч}$ на первой и последующих операциях вытяжки вычислялись на ЭВМ по соотношения, приведенным в разд. 2 и 3 соответственно. Расчеты выполнены при $\mu_M=0,05$. Сравнение результатов теоретических расчетов и экспериментальных данных по силовым режимам операций вытяжки указывает на их удовлетворительное согласование (до 15 %).

5 Теоретические исследования операции реверсивной вытяжки осесимметричных деталей с фланцем из анизотропных материалов

Для изготовления тонкостенных полуторов обычно используют реверсивный метод штамповки. Он применяется с целью увеличения растягивающих и уменьшения сжимающих напряжений. Реверсивная вытяжка является высокопроизводительным процессом, обеспечивающим получение изделий с высоким качеством поверхности. Несмотря на широкое применение этого способа, теория процесса реверсивной вытяжки осесимметричных деталей из анизотропных материалов не достаточно разработана.

5.1 Математическая модель реверсивной вытяжки осесимметричных деталей с фланцем из трансверсально-изотропного материала

Операция реверсивной вытяжки обычно осуществляется на матрицах с радиальным профилем. Схема процесса реверсивной вытяжки осесимметричной детали с фланцем с коэффициентом вытяжки $m_d = r_n / R_\zeta$, соответствующая установившейся стадии процесса, приведена на рисунке 5.1.

Рассмотрим распределение напряжений и деформаций в заготовке при реверсивной вытяжке осесимметричных деталей с фланцем.

Очаг пластической деформации состоит из шести участков: участок 1 расположен на плоскости матрицы и ограничен краем заготовки с текущей координатой R_k с одной стороны и постоянной координатой $r_{\tilde{a}\delta 1}$, точкой сопряжения плоского и криволинейного участков матрицы; участок 2 охватывает кромку матрицы и ограничен координатами $r_{\tilde{a}\delta 1}$ и r_{n-1} ; участок 3 (цилиндрический участок); участок 4 охватывает кромку матрицы и ограничен координатами r_{n-1} и $r_{\tilde{a}\delta 2}$; участок 5 расположен на плоскости матрицы и ограничен координатами $r_{\tilde{a}\delta 2}$ и $r_{\tilde{a}\delta 3}$; участок 6 расположен на тороидальной поверхности матрицы и ограничен координатами $r_{\tilde{a}\delta 3}$ и r_n .

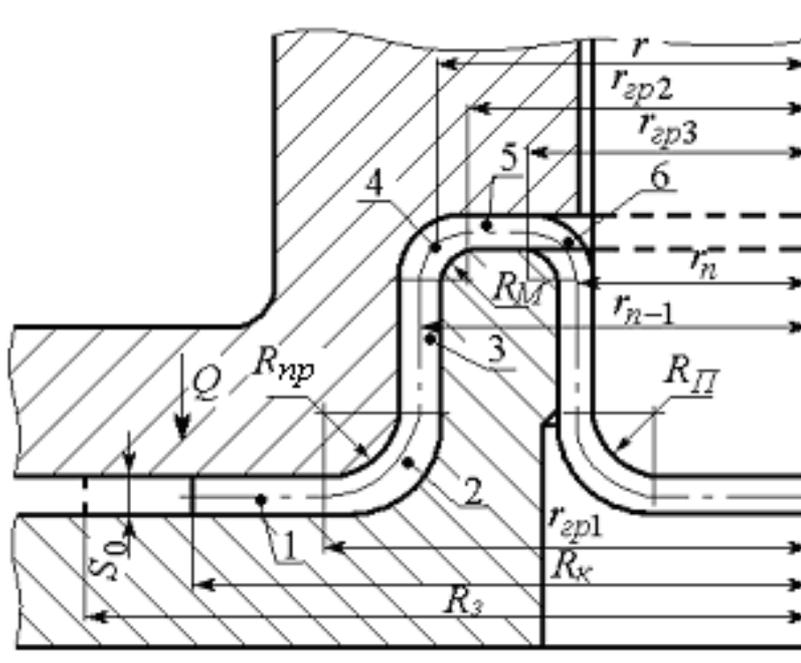


Рисунок 5.1 - Схема реверсивной вытяжки осесимметричных деталей с фланцем

Принимается, что напряженное состояние плоское, материал заготовки - несжимаемым, трансверсально-изотропным, подчиняющимся условию пластичности Мизеса - Хилла (2.1) и ассоциированному закону пластического течения (2.2). Допускаем, что толщина стенки исходного полуфабриката постоянна по всей его высоте.

Меридиональные σ_r и окружные σ_θ напряжения на участке l очага пластической деформации определяем путем численного решения приближенного уравнения равновесия

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r \left(1 + \frac{r ds}{s dr} \right) - \sigma_\theta = 0 \quad (5.1)$$

совместно с условием пластичности

$$\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 - \frac{2R}{1+R} \sigma_r \sigma_\theta = \sigma_s^2 \quad (5.2)$$

при граничном условии, учитывающем влияние силы прижима на кромке матрицы:

при $r = R_k \quad \sigma_r = \frac{\mu Q}{\pi R_k s}, \quad (5.3)$

где R_k - радиус края заготовки; Q - сила прижима; $Q = \pi(R_k^2 - r_{a\partial l}^2)q$; q - давление прижима, которое назначается в соответствии с рекомендациями, приведенными в работах [77, 133]; μ - коэффициент трения на контактной поверхности заготовки и рабочего инструмента; R - коэффициент нормальной анизотропии; σ_s - сопротивление материала пластическому деформированию; s_0 - толщина заготовки краевой части заготовки. Остальные величины даны на рисунке 5.1.

Скорости деформации в меридиональном ξ_r , тангенциальном ξ_θ направлениях и по толщине ξ_z определяются по выражениям

$$\xi_r = \frac{dV_r}{dr}; \quad \xi_\theta = \frac{V_r}{r}; \quad \xi_z = \frac{\dot{s}}{s}, \quad (5.4)$$

где V_r – меридиональная скорость течения.

Используя уравнение несжимаемости $\xi_r + \xi_\theta + \xi_z = 0$ и уравнения связи скоростей деформаций и напряжений (2.2), можно показать, что

$$\frac{dV_r}{dr} = -\frac{V_r}{r}(1+f); \quad f = -\frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{\sigma_\theta(1+R) - R\sigma_r}. \quad (5.5)$$

Изменение толщины заготовки может быть определено по выражению:

$$\frac{ds}{s} = \frac{dr}{r} f. \quad (5.6)$$

Принимая во внимание выражение (5.6), уравнение равновесие (5.1) запишется в виде:

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r(1+f) - \sigma_\theta = 0. \quad (5.7)$$

Интегрирование этого уравнения выполняем численно методом конечных разностей от краевой части заготовки, где известны все входящие в уравнение величины. Величина окружного напряжения σ_θ вычисляется из условия пластичности (5.2). При анализе процесса вытяжки без прижима в граничном условии (5.3) необходимо принять $Q = 0$.

Меридиональные σ_r и окружные σ_θ напряжения на участке 2 очага пластической деформации определяются путем решения приближенного уравнения равновесия

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r \left(1 + \frac{ds}{s} \frac{r}{dr} \right) - \sigma_\theta - \frac{\mu \sigma_r}{dr} d\varphi = 0 \quad (5.8)$$

совместно с условием пластичности (5.2) при граничном условии, учитывающем влияние изгиба заготовки на кромке матрицы:

$$\text{при } r = r_{\tilde{a}\delta 1} \quad \sigma_r = \sigma_r(r_{\tilde{a}\delta 1}) + \sigma_s(r_{\tilde{a}\delta 1}) \frac{s}{4R'_{i\delta}}, \quad (5.9)$$

где $R'_{i\delta} = R_{i\delta} + 0,5s$; $R_{i\delta}$ - радиус закругления прижима; $\sigma_r(r_{\tilde{a}\delta 1})$ и $\sigma_s(r_{\tilde{a}\delta 1})$ - величины меридионального напряжения и сопротивления материала пластическому деформированию, вычисленные при $r = r_{\tilde{a}\delta 1}$.

Принимая во внимание соотношения (5.6), уравнение равновесия может быть записано так:

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r(1+f) - \sigma_\theta - \frac{\mu \sigma_r}{dr} d\varphi = 0. \quad (5.10)$$

На участке 3 очага деформации меридиональное напряжение

$$\sigma_r = \sigma_r(r_{n-1}) + \sigma_s(r_{n-1}) \frac{s}{4R'_{i\delta}}, \quad (5.11)$$

а величина окружного напряжения σ_θ определяется из условия пластичности (5.2).

Для нахождения меридионального σ_r и окружного σ_θ напряжений на участке 4 решаем совместно уравнение равновесия (5.10) с условием пластичности (5.2) при граничном условии:

$$\text{при } r = r_{n-1} \quad \sigma_r = \sigma_r(r_{n-1}) + \sigma_s(r_{n-1}) \frac{s}{4R'_j}, \quad (5.12)$$

где $R'_j = R_j + 0,5s$; $\sigma_r(r_{n-1})$ и $\sigma_s(r_{n-1})$ - величины меридионального напряжения и сопротивления материала пластическому деформированию, вычисленные при $r = r_{n-1}$.

Интегрирование уравнения равновесия (5.7) совместно с условием пластичности (5.2) при граничном условии:

$$\text{при } r = r_{\tilde{a}\delta 2} \quad \sigma_r = \sigma_r(r_{\tilde{a}\delta 2}) + \sigma_s(r_{\tilde{a}\delta 2}) \frac{s}{4R_j^*}, \quad (5.13)$$

позволяет определить распределение напряжений на участке 5, где $\sigma_r(r_{\tilde{a}\delta 2})$ и $\sigma_s(r_{\tilde{a}\delta 2})$ - величины меридионального напряжения и сопротивления материала пластическому деформированию, вычисленные при $r = r_{\tilde{a}\delta 2}$.

Меридиональные σ_r и окружные σ_θ напряжения на участке 6 очага пластической деформации определяются путем решения приближенного уравнения равновесия (5.10) совместно с условием пластичности (5.2) при граничном условии, учитывающем влияние изгиба заготовки на кромке матрицы:

$$\text{при } r = r_{\tilde{a}\delta 3} \quad \sigma_r = \sigma_r(r_{\tilde{a}\delta 3}) + \sigma_s(r_{\tilde{a}\delta 3}) \frac{s}{4R_j^*}, \quad (5.14)$$

где $R_j^* = R_j + 0,5s$; $\sigma_r(r_{\tilde{a}\delta 3})$ и $\sigma_s(r_{\tilde{a}\delta 3})$ - величины меридионального напряжения и сопротивления материала пластическому деформированию, вычисленные при $r = r_{\tilde{a}\delta 3}$.

Максимальное значение меридионального напряжения $\sigma_{r \max}$ соответствует $r = r_n$:

$$\sigma_{r \max} = \sigma_r(r_n) + \sigma_s(r_n) \frac{s}{4R_j^*}, \quad (5.15)$$

где $\sigma_r(r_n)$ и $\sigma_s(r_n)$ - величины меридионального напряжения и сопротивления материала пластическому деформированию, вычисленные при $r = r_n$.

Сила процесса определяется по формуле

$$P = 2\pi r_n s \sigma_{r \max} \Big|_{r=r_n}. \quad (5.16)$$

Величина приращения окружной деформации $d\varepsilon_\theta$ находится по выражению

$$d\varepsilon_\theta = \frac{dr}{r},$$

где r - координата рассматриваемого сечения очага деформации.

Приращения меридиональных деформаций $d\varepsilon_r$ и деформаций по толщине заготовки $d\varepsilon_z$ могут быть определены по выражениям:

$$d\varepsilon_z = -d\varepsilon_\theta \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{\sigma_\theta(1+R) - R\sigma_r}; \quad d\varepsilon_r = -(d\varepsilon_\theta + d\varepsilon_z).$$

Приращение интенсивности деформации $d\varepsilon_i$ определяется по формуле

$$d\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2(2+R)}}{\sqrt{3}(2R+1)} \left\{ R(d\varepsilon_r - d\varepsilon_\theta)^2 + [d\varepsilon_\theta(1+R) + Rd\varepsilon_r]^2 + [d\varepsilon_r(1+R) + Rd\varepsilon_\theta]^2 \right\}^{1/2}, \quad (5.17)$$

а интенсивность деформации ε_i - по выражению

$$\varepsilon_i = \int_{R_k}^r d\varepsilon_i.$$

Для учета упрочнения материала воспользуемся зависимостью

$$\sigma_s = \sigma_{0,2} + A(\varepsilon_i)^n, \quad (5.18)$$

где $\sigma_{0,2}$ - условный предел текучести; A и n - характеристики кривой упрочнения материала.

Изменение толщины заготовки в процессе реверсивной вытяжки осесимметричных деталей с фланцем оценивалось по соотношению

$$\ln \frac{s}{s_0} = - \int_{r_k}^r \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{\sigma_\rho R - \sigma_\theta(1+R)} \frac{dr}{r}. \quad (5.19)$$

Положение внешнего края R_k в процессе деформации вычисляется из условия постоянства объема заготовки в зависимости от перемещения пуансона с учетом изменения толщины заготовки.

5.2. Установление влияния анизотропии механических свойств исходных материалов, технологических параметров на силовые режимы, предельные возможности формоизменения и формирование показателей качества изготавливаемых осесимметричных деталей

5.2.1 Напряженное состояние. Силовые режимы

Силовые режимы операции реверсивной вытяжки исследовались в зависимости от коэффициента вытяжки m_d , радиуса закругления матрицы R_M , условий трения на контактных границах рабочего инструмента и заготовки μ и величины давления прижима q для алюминиевого АМг6 и титанового ПТ-3Вкт сплавов, механические свойства которых приведены в разд. 3.

Расчеты выполнены при $r_n = 950$ мм; $s_0 = 3,5$ мм в следующих диапазонах изменения технологических параметров процесса: $m_d = 0,6 \dots 0,9$; $\bar{R}_j = 2 \dots 20$; $\mu = 0,01 \dots 0,3$; $q = 0 \dots 6$ МПа; $\bar{R}_M = R_M / s_0$.

Графические зависимости изменения относительной величины силы $\bar{P} = P / (2\pi r_n s_0 \sigma_{0,2})$ процесса реверсивной вытяжки осесимметричных деталей с фланцем из алюминиевого АМг6 и титанового ПТ-3Вкт сплавов от относительной величины перемещения пуансона $\bar{h}_{II} = h / h_{II}$ при фиксированных значениях коэффициента вытяжки m_d и коэффициента трения на контактных границах рабочего инструмента и заготовки μ приведены на рисунках 5.2 и 5.3 соответственно. Здесь h_{II} - рабочий ход пуансона; $s_0 = 3,5$ мм $R_j = R_{i\delta} = 50$ мм.

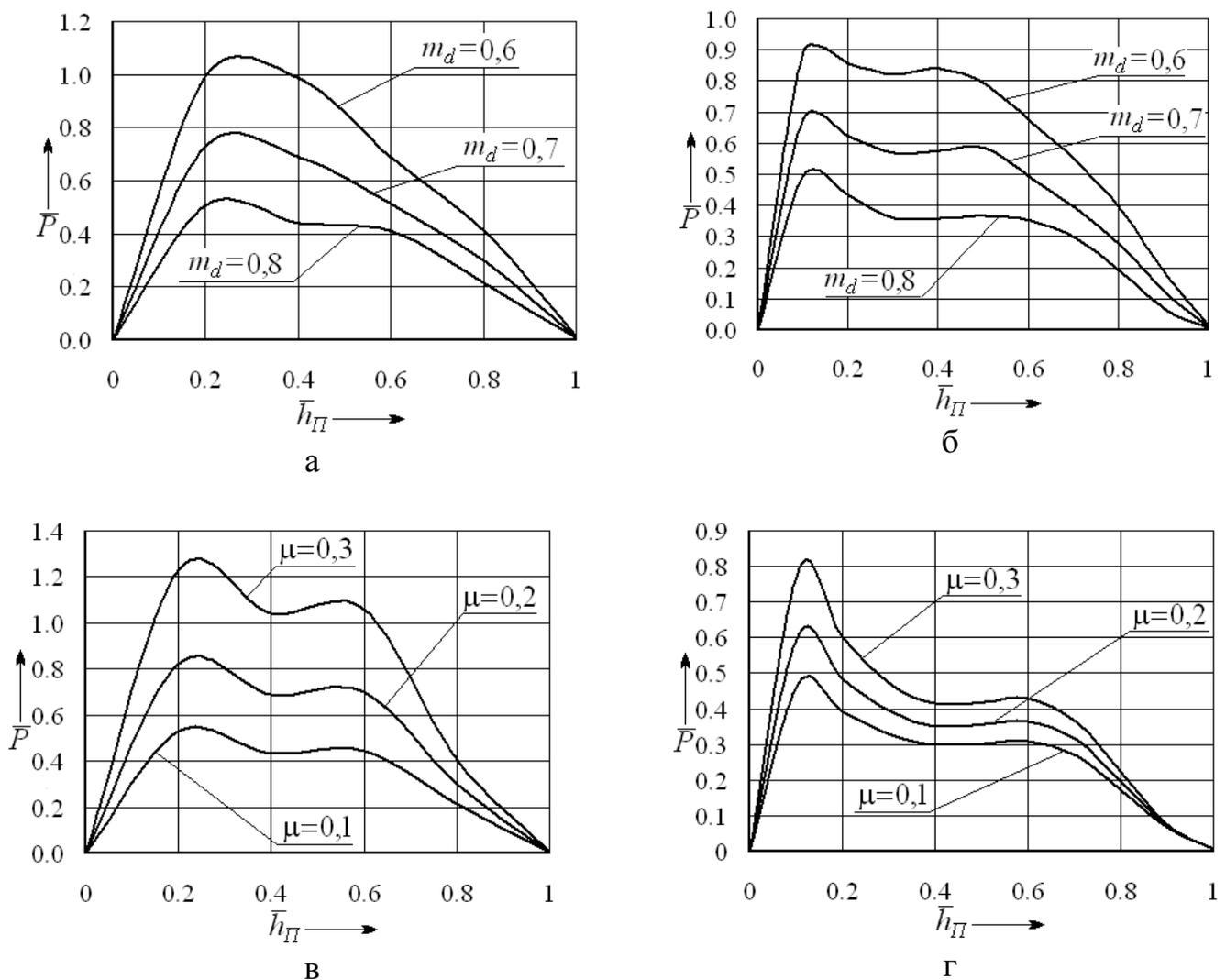


Рисунок 5.2 - Графические зависимости изменения \bar{P} от \bar{h}_j при вытяжке осесимметричных деталей из титанового сплава ПТ-3Вкт:

а - $\bar{q} = 0,01$; $\mu = 0,05$; б - $\bar{q} = 0$; $\mu = 0,05$;

в - $\bar{q} = 0,01$; $m_d = 0,844$; г - $\bar{q} = 0$; $m_d = 0,844$

Анализ графических зависимостей и результатов расчетов показал, что графические зависимости изменения относительной величины силы \bar{P} процесса реверсивной вытяжки осесимметричных деталей с фланцем от относительной величины перемещения пуансона \bar{h}_j носят сложный характер. Установлено, что с уменьшением коэффициента вытяжки m_d и увеличением коэффициента трения на контактных границах рабочего инструмента и заготовки μ величина \bar{P} возрастает. Так, уменьшение коэффициента вытяжки с 0,8 до 0,6 сопровождается ростом \bar{P} в 2 раза.

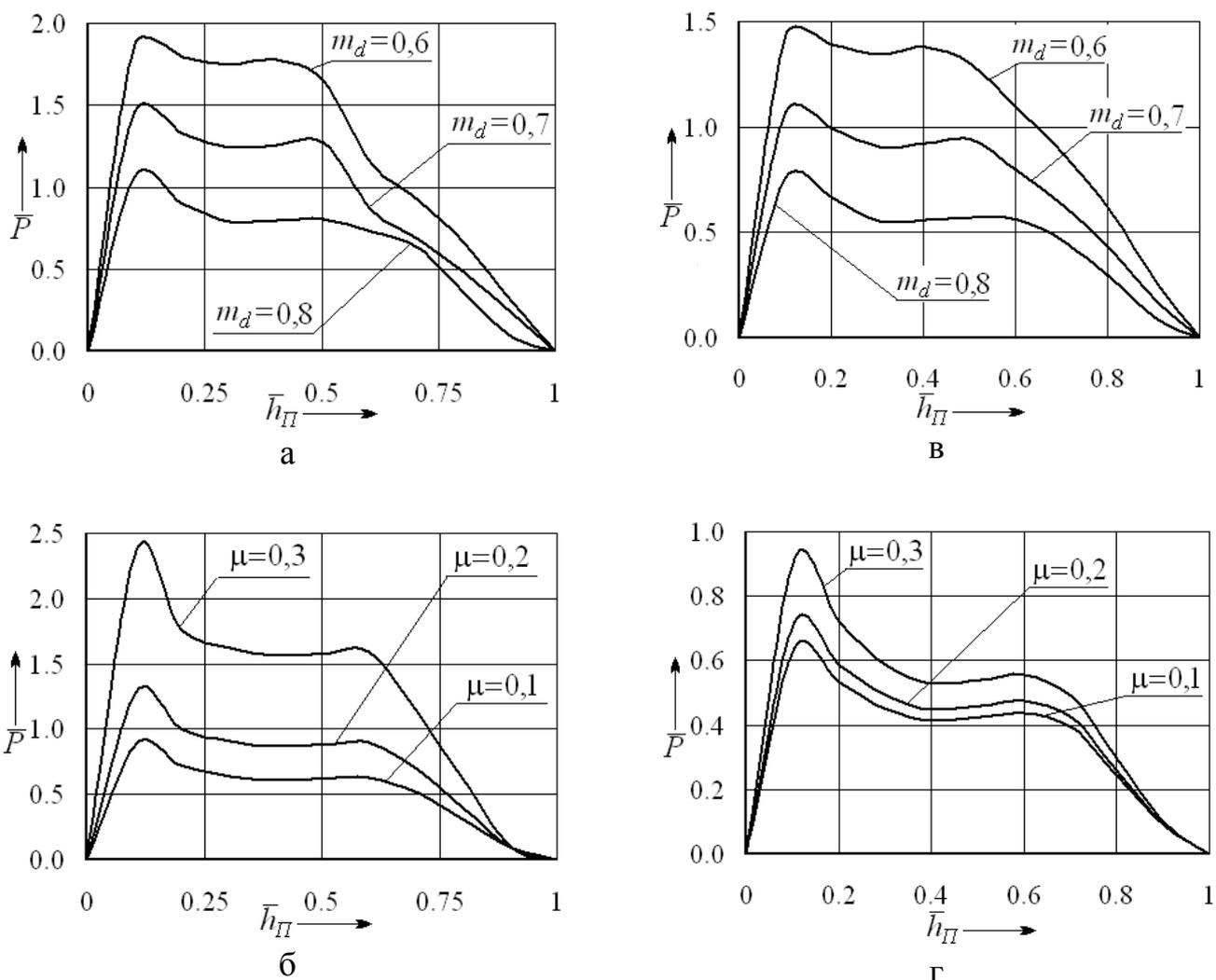


Рисунок 5.3 - Графические зависимости изменения \bar{P} от \bar{h}_j при вытяжке осесимметричных деталей из алюминиевого сплава АМг6:
 а - $\bar{q} = 0,01$; $\mu = 0,05$; б - $\bar{q} = 0$; $\mu = 0,05$;
 в - $\bar{q} = 0,01$; $m_d = 0,844$; г - $\bar{q} = 0$; $m_d = 0,844$

На рисунках 5.4 - 5.9 приведены зависимости изменения относительных максимальных величин сил \bar{P} от коэффициента вытяжки m_d , радиуса закругления матрицы \bar{R}_j , коэффициента трения на контактных границах рабочего инструмента и заготовки μ и относительной величины давления прижима $\bar{q} = q/\sigma_{0,2}$ для алюминиевого АМг6 и титанового ПТ-3Вкт сплавов ($s_0 = 3,5$ мм; $R_j = 50$ мм). Следует заметить, что при реверсивной вытяжке относительные величины силы \bar{P} и радиального напряжения $\bar{\sigma}_r$ на выходе из очага пластической деформации равны $\bar{P} = \bar{\sigma}_r$ ($\bar{\sigma}_r = \sigma_r/\sigma_{0,2}$).

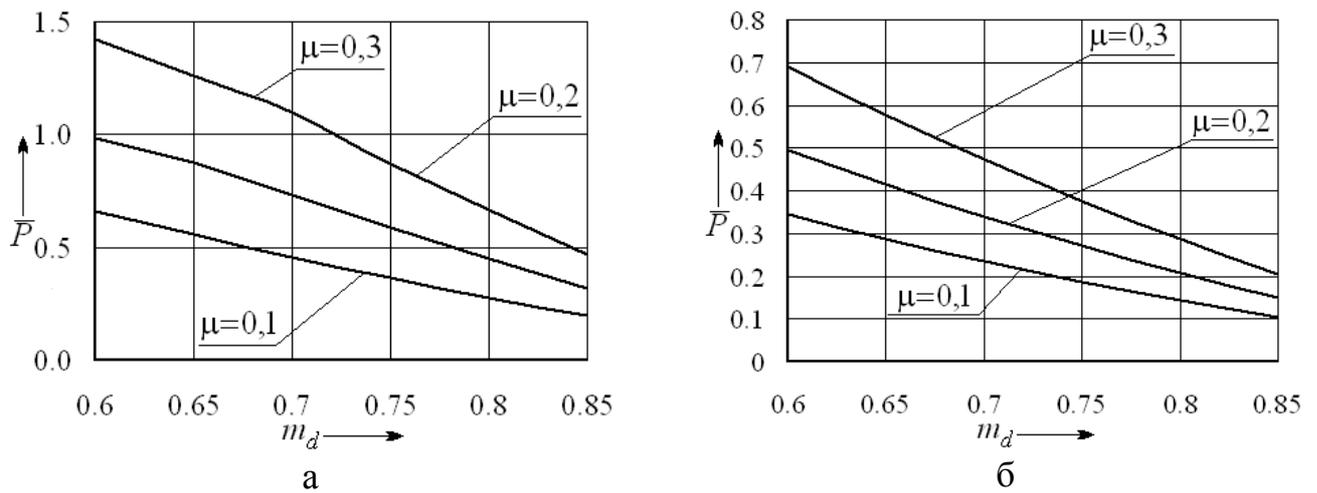


Рисунок 5.4 - Графические зависимости изменения \bar{P} от m_d для алюминиевого АМг6 (а) и титанового ПТЗкт (б) сплавов ($\bar{q} = 0,03$)

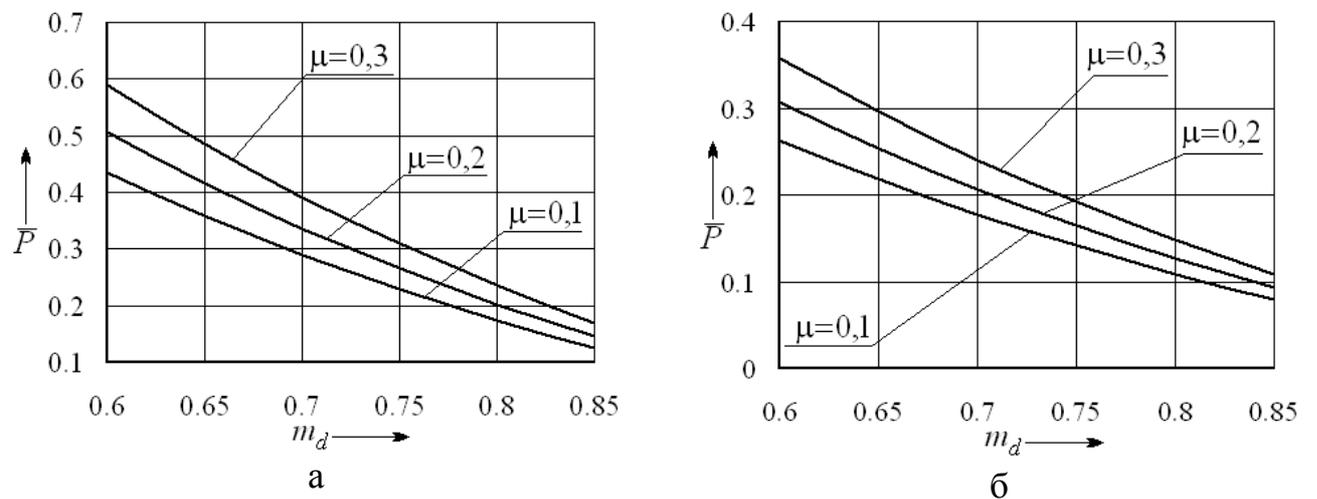


Рисунок 5.5 - Графические зависимости изменения \bar{P} от m_d для алюминиевого АМг6 (а) и титанового ПТЗкт (б) сплавов ($\bar{q} = 0$)

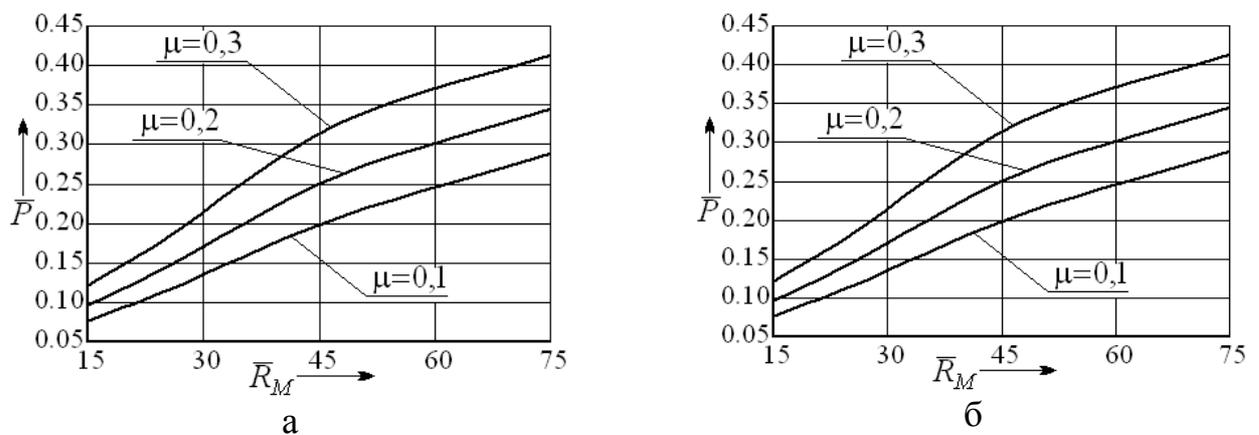


Рисунок 5.6 - Графические зависимости изменения \bar{P} от \bar{R}_j для алюминиевого АМг6 (а) и титанового ПТЗкт (б) сплавов:
а - $m_d = 0,844$; $\bar{q} = 0,03$; б - $m_d = 0,844$; $\bar{q} = 0,01$

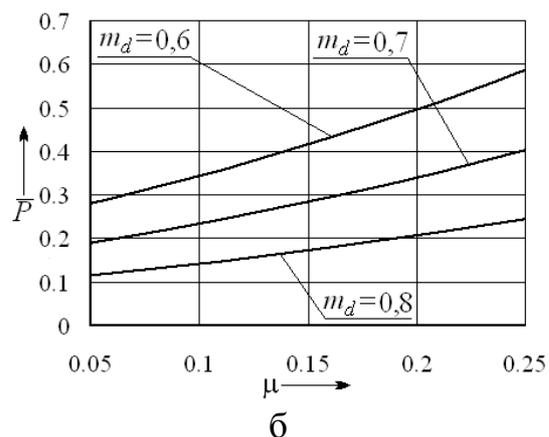
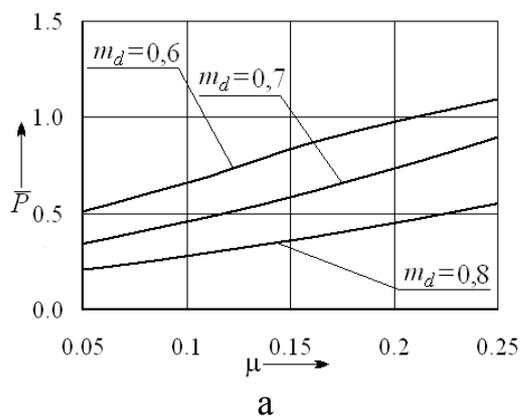


Рисунок 5.7 - Графические зависимости изменения \bar{P} от μ для алюминиевого АМг6 (а) и титанового ПТЗкт (б) сплавов: а - $\bar{q} = 0,03$; б - $\bar{q} = 0,01$

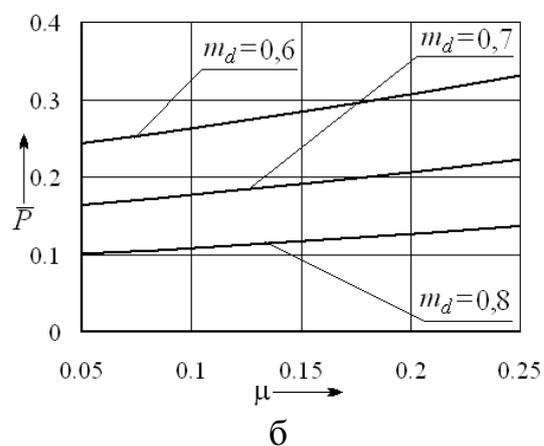
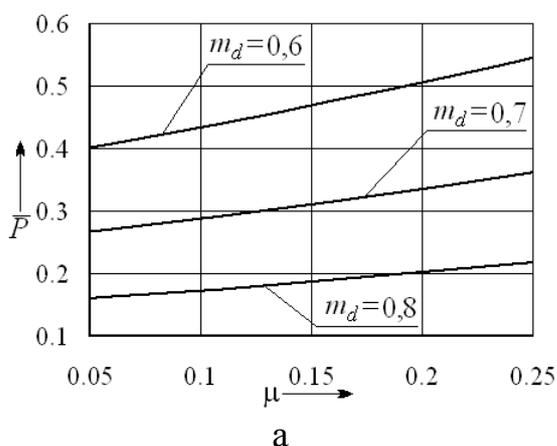


Рисунок 5.8 - Графические зависимости изменения \bar{P} от μ для алюминиевого АМг6 (а) и титанового ПТЗкт (б) ($\bar{q} = 0$) сплавов

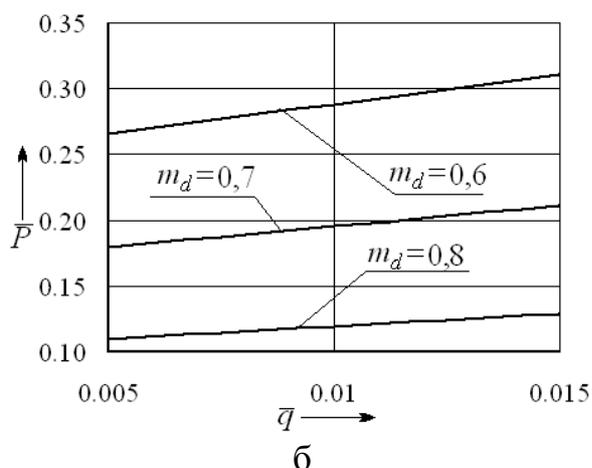
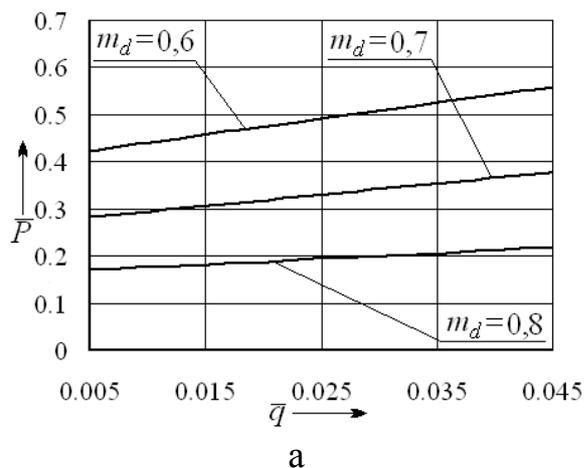


Рисунок 5.9 - Графические зависимости изменения \bar{P} от \bar{q} для алюминиевого АМг6 (а) и титанового ПТЗкт (б) сплавов ($\mu = 0,05$)

Анализ графических зависимостей показывает, что относительная величина силы процесса \bar{P} возрастает с уменьшением коэффициента вытяжки m_d , радиусов закругления прижима $\bar{R}_{i\delta}$ и матрицы \bar{R}_j , ростом коэффициента трения на контактных границах рабочего инструмента и заготовки μ и относительной величины давления прижима \bar{q} (см. рисунки 5.5 – 5.9).

5.2.2 Влияние анизотропии механических свойств заготовки на силовые режимы

На рисунках 5.10 и 5.11 приведены графические зависимости изменения относительной величины силы $\bar{P} = P / (2\pi r_n s_0 \sigma_{0,2})$ от коэффициента нормальной анизотропии R при фиксированных значениях коэффициента вытяжки m_d (а) и коэффициента трения на контактных границах рабочего инструмента и заготовки μ (б).

Расчеты выполнены при следующих параметрах кривой упрочнения: материал 1 - $\sigma_{0,2} = 600,8$ МПа; $A = 502,44$ МПа; $n = 0,559$; материал 2 - $\sigma_{0,2} = 195,7$ МПа; $A = 277,24$ МПа; $n = 0,256$.

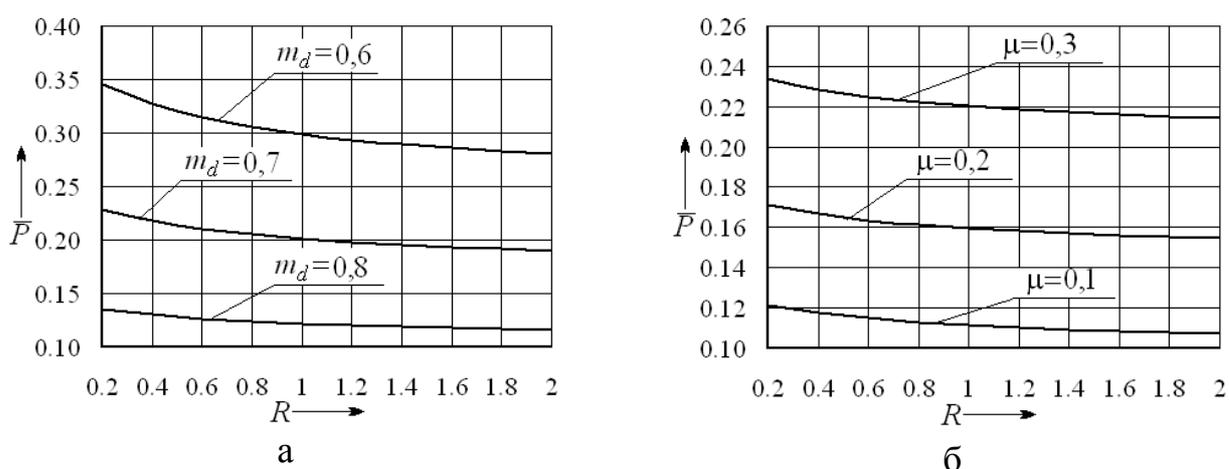


Рисунок 5.10 - Графические зависимости изменения \bar{P} от R (материал 1):

а - $\mu = 0,05$; $\bar{R}_M = 15$; $\bar{q} = 0,01$;

б - $m_d = 0,844$; $\bar{R}_M = 15$; $\bar{q} = 0,01$

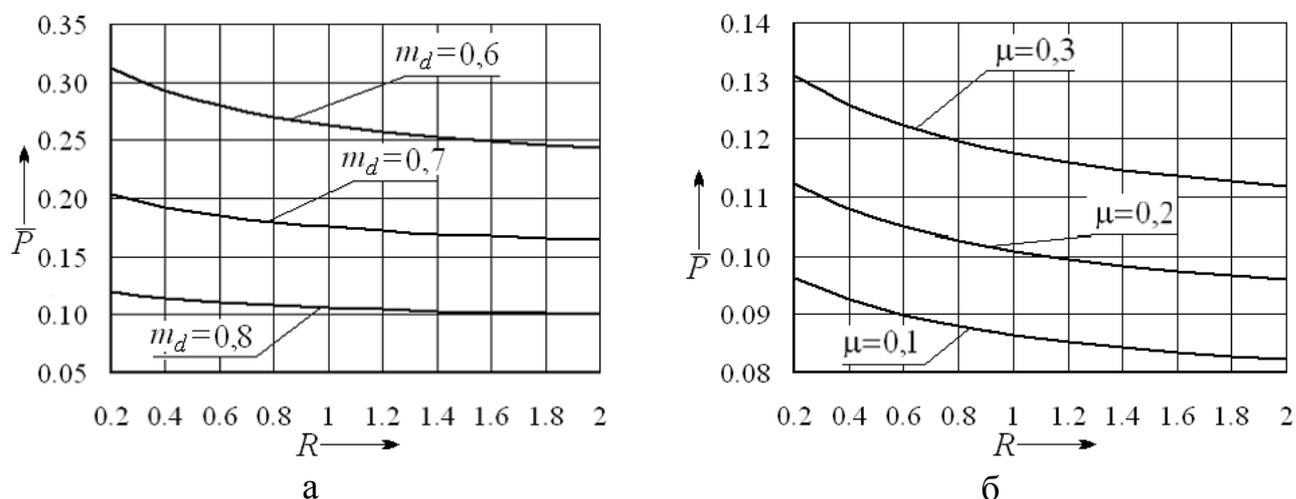


Рисунок 5.11 - Графические зависимости изменения \bar{P} от R (материал 2):

а - $\mu = 0,05$; $\bar{R}_M = 15$; $\bar{q} = 0$;

б - $m_d = 0,844$; $\bar{R}_M = 15$; $\bar{q} = 0$

Анализ графических зависимостей показывает, что с увеличением коэффициента нормальной анизотропии R относительная величина силы \bar{P} уменьшается. Влияние коэффициента анизотропии R на силовые режимы процесса усиливаются с уменьшением коэффициента вытяжки m_d и увеличением коэффициента трения μ .

Таким образом, при анализе силовых режимов процесса вытяжки необходимо учитывать анизотропию механических свойств исходной листовой заготовки.

5.2.3 Оценка повреждаемости материала осесимметричных деталей при реверсивной вытяжке

Повреждаемость материала ω_e (степень использования ресурса пластичности) при пластическом деформировании вычислялась по формуле (2.30). В зависимости от условий эксплуатации или последующей обработки изготавливаемого изделия уровень повреждаемости не должен превышать величины χ . До деформации (при $t = t_0$) $\omega_e = 0$, а в момент разрушения ($t = t_p$) $\omega_e = \chi = 1$.

При назначении величин степеней деформации в процессе пластического формоизменения следует учитывать рекомендации по степени использования запаса

пластичности В.Л. Колмогорова и А.А. Богатова, согласно которым для ответственных деталей, работающих и подвергающихся после обработки давлением термической обработке (отжигу или закалке), допустимой величиной степени использования запаса пластичности следует считать $\chi = 0,25$, а для неответственных деталей $\chi = 0,65$.

Графические зависимости изменения величины накопленной повреждаемости ω_e от относительной величины высоты детали $\bar{h} = h/h_{\bar{a}}$ при фиксированных значениях коэффициента вытяжки m_d и коэффициента трения на контактных границах рабочего инструмента и заготовки μ приведены на рисунках 5.12 и 5.13 соответственно. Здесь $h_{\bar{a}}$ - высота детали.

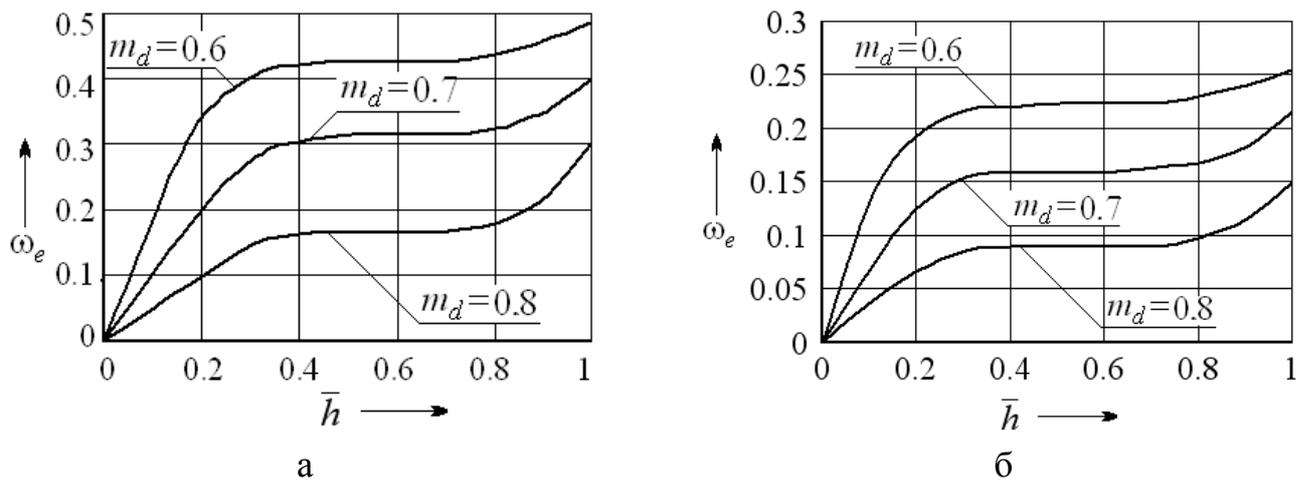


Рисунок 5.12 - Графические зависимости изменения ω_e от \bar{h} :
а – сплав АМГ6; б – сплав ПТ-3Вкт ($\bar{q} = 0$; $\mu = 0,05$)

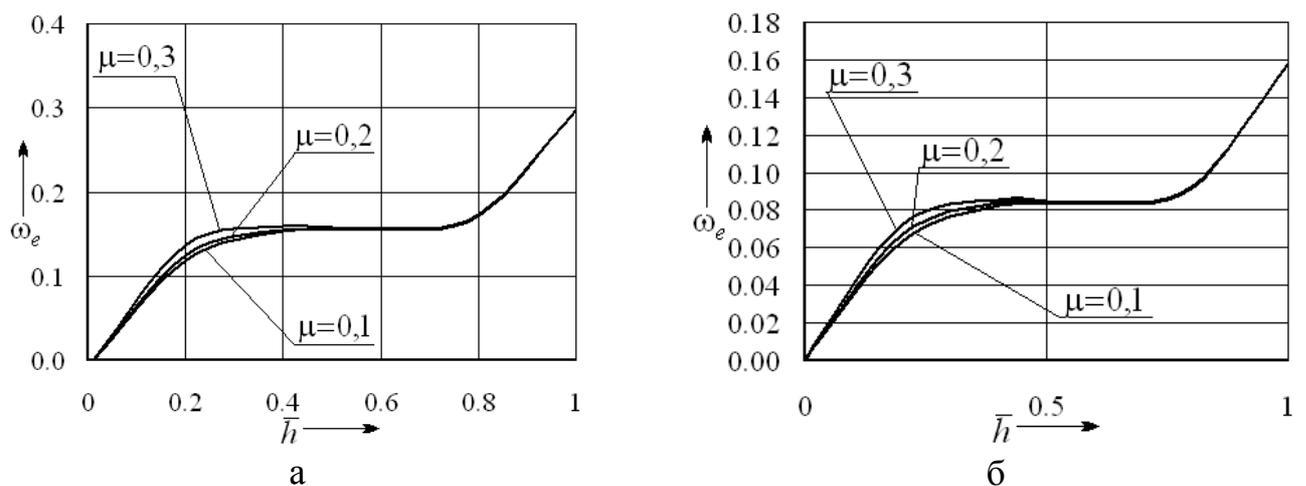


Рисунок 5.13 - Графические зависимости изменения ω_e от \bar{h} :
а – сплав АМГ6; б – сплав ПТ-3Вкт ($\bar{q} = 0$; $m_d = 0,844$)

Расчеты выполнены для алюминиевого АМг6 и титанового ПТ-3Вкт сплавов, механические свойства которых приведены в разд. 3. Принималось $r_n = 1000$ мм; $s_0 = 3,5$ мм; $R_l = R_{np} = 50$ мм.

Анализ графических зависимостей и результатов расчетов показал, что изменения накопленной повреждаемости ω_e от относительной величины высоты детали \bar{h} имеет сложный характер. Установлено, что с уменьшением коэффициента вытяжки m_d и увеличением коэффициента трения на контактных границах рабочего инструмента и заготовки μ максимальная величина накопленных микроповреждений ω_e возрастает. Так, уменьшение коэффициента вытяжки с 0,8 до 0,6 сопровождается ростом ω_e в 3 раза. Рост коэффициента трения на контактных границах рабочего инструмента и заготовки μ с 0,1 до 0,3 сопровождается увеличением максимальной величины накопленных микроповреждений ω_e в 2 раза, что связано с повышением меридиональных напряжений σ_r .

Приведенные выше результаты могут быть использованы для оценки качества (накопленной величины микроповреждений) изготавливаемых осесимметричных деталей реверсивной вытяжкой через радиальную матрицу.

5.2.4 Предельные возможности формообразования

Полученные соотношения для оценки напряженного и деформированного состояний, силовых режимов операции реверсивной вытяжки осесимметричных деталей с фланцем из трансверсально-изотропной заготовки использованы для определения предельных возможностей деформирования.

Предельные возможности процесса вытяжки осесимметричных деталей ограничиваются максимальной величиной осевого напряжения $\sigma_{r \max}$ в стенке детали на выходе из очага деформации, которая не должна превышать величины сопротивления материала пластическому деформированию в условиях плоского напряженного состояния с учетом упрочнения (5.20), допустимой степенью использования ресурса пластичности (1.30) и критерием локальной потери устойчивости заготовки (1.35).

В зависимости от условий эксплуатации или последующей обработки изготавливаемого изделия уровень повреждаемости не должен превышать величины χ . До деформации (при $t = t_0$) $\omega_e = 0$, а в момент разрушения ($t = t_p$) $\omega_e = \chi = 1$. Величина предельной интенсивности деформации ε_{inp} находилась по выражению (1.29).

Предельные возможности операции реверсивной вытяжки исследовались в зависимости от радиуса закругления матрицы R_j , условий трения на контактных границах рабочего инструмента и заготовки μ и величины давления прижима q . Расчеты выполнены для алюминиевого АМг6 и титанового ПТ-3Вкт сплавов. Исследования выполнены при $r_n = 1000$ мм; $s_0 = 3,5$ мм в следующих диапазонах изменения технологических параметров процесса: $\bar{R}_j = \bar{R}_{i\partial} = 2 \dots 20$; $\mu = 0,01 \dots 0,3$; $q = 0 \dots 6$ МПа; $\bar{R}_M = R_M / s_0$.

На рисунках 5.14 и 5.15 представлены графические зависимости изменения предельного коэффициента вытяжки m_{dnp} от коэффициента трения на контактных границах рабочего инструмента и заготовки μ , на рисунке 5.16 – от относительной величины давления прижима $\bar{q} = q / \sigma_{0,2}$, а на рисунке 5.17 – от относительного радиуса закругления матрицы \bar{R}_M для алюминиевого АМг6 (а) и титанового ПТ-3Вкт (б) сплавов соответственно.

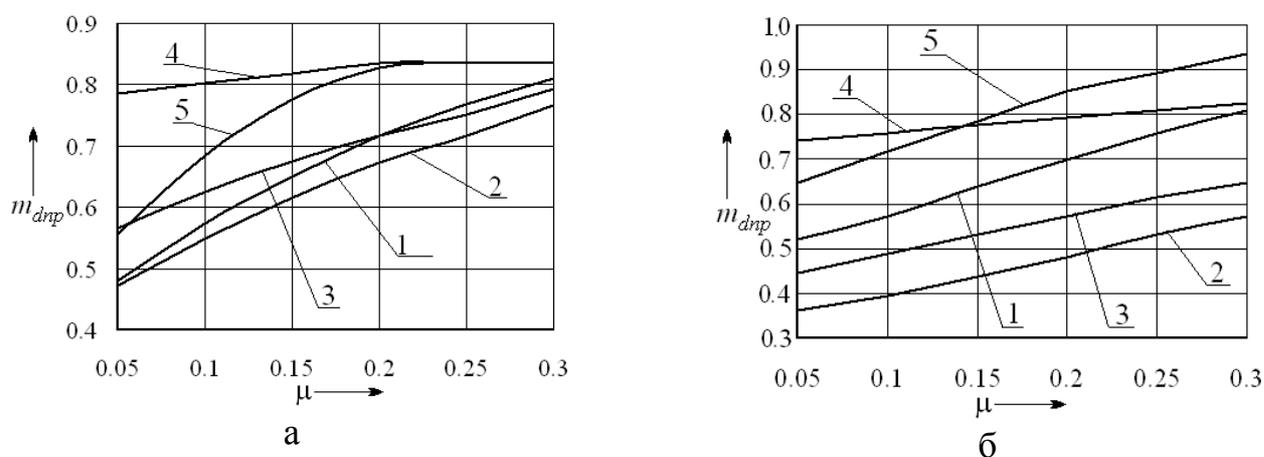


Рисунок 5.14 - Графические зависимости изменения m_{dnp} от μ :

а – алюминиевый сплав АМг6; б – титановый сплав ПТ-3Вкт

(а - $\bar{R}_M = 15$; $\bar{q} = 0,03$; б - $\bar{R}_M = 15$ мм; $\bar{q} = 0,01$)

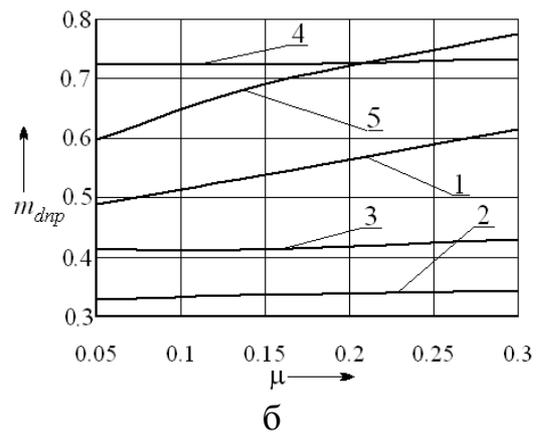
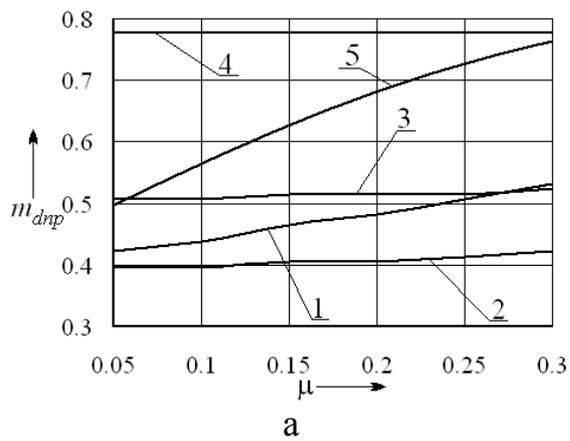


Рисунок 5.15 - Графические зависимости изменения m_{dnp} от μ :
 а – алюминиевый сплав АМг6; б – титановый сплав ПТ-3Вкт
 ($\bar{R}_M = 15$; $\bar{q} = 0$)

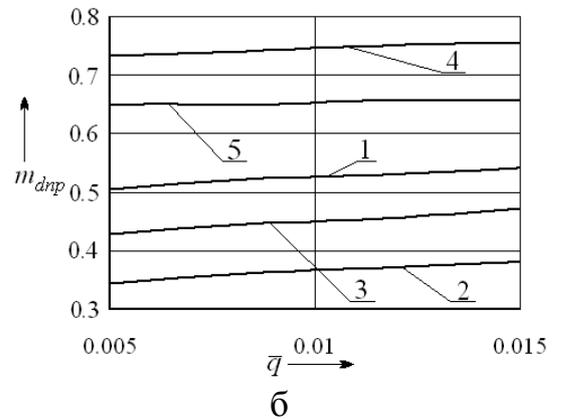
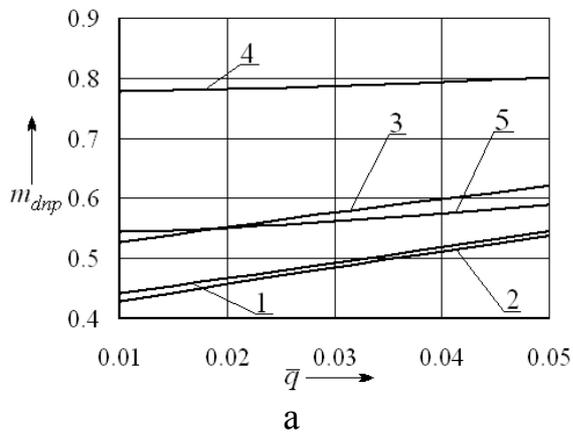


Рисунок 5.16 - Графические зависимости изменения m_{dnp} от \bar{q} :
 а – алюминиевый сплав АМг6; б – титановый сплав ПТ-3Вкт
 ($\mu = 0,05$; $\bar{R}_M = 15$)

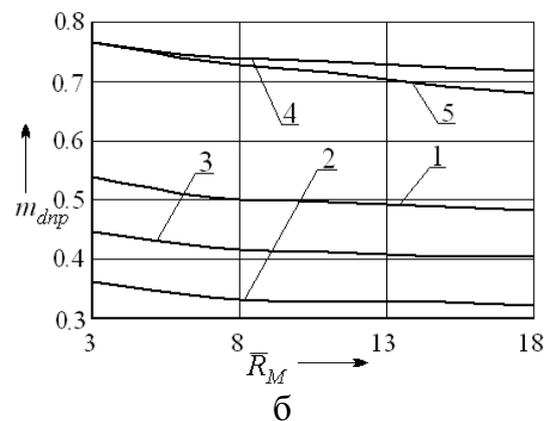
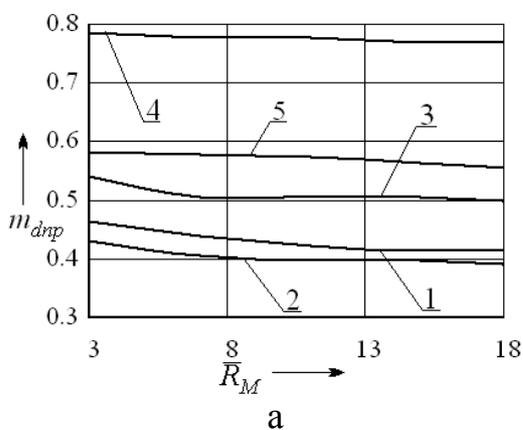


Рисунок 5.17 - Графические зависимости изменения m_{dnp} от \bar{R}_M :
 а – алюминиевый сплав АМг6; б – титановый сплав ПТ-3Вкт ($\mu = 0,05$; $\bar{q} = 0$)

Здесь кривые 1, 2, 3, 4 и 5 соответствуют предельным коэффициентам вытяжки m_{dnp} , вычисленным по максимальной величине напряжения в стенке детали на выходе из очага деформации, которая не должна превышать величины сопротивления материала пластическому деформированию в условиях плоского напряженного состояния с учетом упрочнения

$$\sigma_{r \max} \leq \sigma_{sr}^*, \quad \sigma_{sr}^* = \sigma_s, \quad (5.20)$$

по допустимой величине накопленных микрповреждений (2.30) при $\chi = 1$, $\chi = 0,65$ и $\chi = 0,25$ и критерию локальной потери устойчивости (2.35). Положения кривых 1 - 5 определяют возможности деформирования заготовки в зависимости от технических требований на изделие.

Анализ графиков и результатов расчета показывает, что предельные возможности формоизменения операции реверсивной вытяжки осесимметричных деталей с фланцем ограничиваются как допустимой величиной накопленных микрповреждений, так и максимальной величиной осевого напряжения на выходе из очага пластической деформации (рисунок 5.16). Это зависит от механических свойств исходного материала, технологических параметров, геометрии рабочего инструмента, коэффициента трения на контактных границах рабочего инструмента и заготовки μ и величины давления прижима q . Показано, что предельные возможности деформирования на операциях реверсивной вытяжки осесимметричных деталей с фланцем из алюминиевого АМгб и титанового ПТ-3Вкт сплавов в рамках исследованных диапазонов изменения технологических параметров ограничиваются допустимой величиной накопленных микрповреждений на выходе из очага пластической деформации. Если обсуждать вопрос об изготовлении осесимметричных особо ответственных деталей, то предельные возможности деформирования ограничиваются критерием локальной потерей устойчивости заготовки.

Установлено, что с уменьшением коэффициента трения на контактных границах рабочего инструмента и заготовки μ и относительной величины давления

прижима $\bar{q} = q/\sigma_{0,2}$ предельный коэффициент вытяжки m_{dnp} уменьшается (рисунки 5.14 и 5.16).

Приведенные выше результаты могут быть использованы для анализа предельных возможностей формоизменения реверсивной вытяжки осесимметричных деталей с фланцем из алюминиевого АМг6 и титанового ПТ-3Вкт сплавов через радиальную матрицу.

5.2.5 Влияние анизотропии механических свойств заготовки на предельные возможности формообразования

Оценено влияние анизотропии механических свойств на предельные возможности формообразования реверсивной вытяжки осесимметричных деталей из трансверсально-изотропных материалов.

На рисунке 5.18 приведены графические зависимости изменения предельного коэффициента вытяжки m_{dnp} от коэффициента нормальной анизотропии R при фиксированных значениях коэффициента трения на контактных границах рабочего инструмента и заготовки μ .

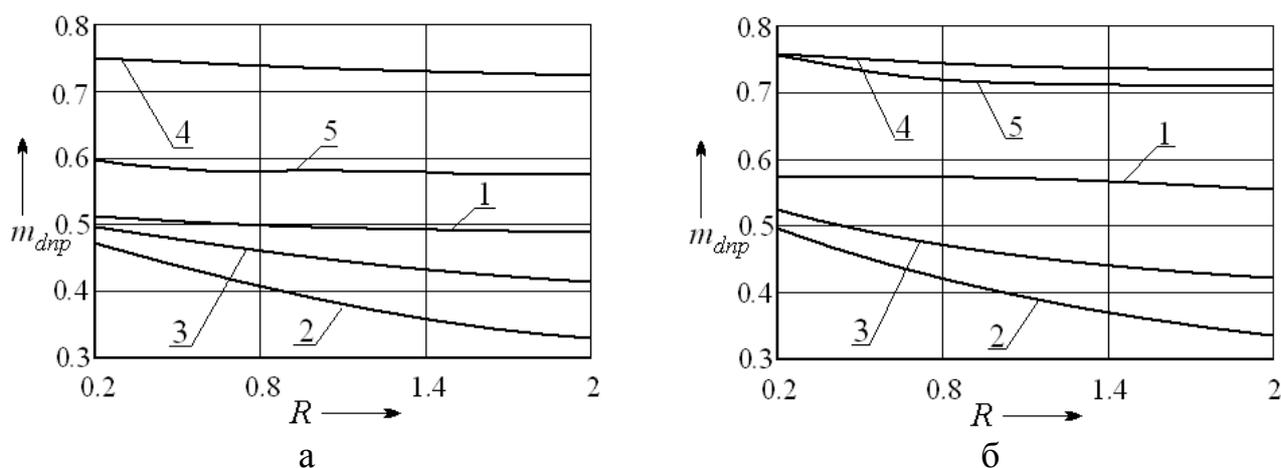


Рисунок 5.18 - Графические зависимости изменения m_{dnp} от R :

а - $\mu = 0,05$; б - $\mu = 0,2$ ($\bar{R}_M = 15$)

Расчеты выполнены при следующих параметрах кривых упрочнения и разрушения: $\sigma_{0,2} = 600,8$ МПа; $A = 502,44$ МПа; $n = 0,559$; $\Omega = 1.2365$; $U = -1.3375$.

Анализ графических зависимостей и результатов расчетов показывает, что величина предельного коэффициента вытяжки m_{dnp} уменьшается с ростом коэффициента анизотропии R и снижением коэффициента трения на контактных границах рабочего инструмента и заготовки μ . Установлено, что увеличение коэффициента нормальной анизотропии R от 0,2 до 2 приводит к уменьшению величины предельного коэффициента утонения m_{dnp} , определенного по степени использования ресурса пластичности, на 45 %, а для m_{dnp} , вычисленного по максимальной величине осевого напряжения на выходе из очага пластической деформации, на 15 %.

Таким образом, при определении предельных возможностей формообразования необходимо учитывать исходную анизотропию механических свойств заготовки.

5.2.6 Относительная величина разностенности изготавливаемых деталей

Выполнены теоретические исследования влияния технологических параметров реверсивной вытяжки, радиуса закругления матрицы R_j , условий трения на контактной поверхности рабочего инструмента и заготовки μ и величины давления прижима q на изменение относительной величины разностенности изготавливаемой детали $\bar{s} = (s - s_0) / s_0$. Толщина заготовки на этапах деформирования вычислялась по выражению (5.19). Расчеты выполнены для реверсивной вытяжки осесимметричных деталей из алюминиевого сплава АМг6, механические свойства которых приведены в предыдущих разделах, при следующих геометрических характеристиках заготовки: $r_n = 1000$ мм; $s_0 = 3,5$ мм; $R_j = 50$ мм.

Анализ графических зависимостей изменения относительной величины разностенности изготавливаемой детали \bar{s} от относительного радиуса рассматриваемой точки $\bar{r} = r/R_k$ (r – координата рассматриваемой точки; R_k – координата края заготовки) в момент совпадения верхней кромки рабочего пояса матрицы с центром радиуса закругления пуансона R_j , приведенных на рисунках 5.19 – 5.21, показывает, что с уменьшением относительного радиуса рассматриваемого сечения \bar{r} и коэффициента вытяжки m_d от 0,8 до 0,6 при $\bar{q}=0$ и $\mu = 0,05$ наблюдается увеличение относительной разностенности \bar{s} детали на 11% (рисунок 5.19, б). С уменьшением коэффициента трения на контактных границах рабочего инструмента и заготовки μ наблюдается увеличение относительной разностенности \bar{s} детали на 18 % при $m_d = 0,7$ (рисунок 5.20, в) и на 12 % при $m_d = 0,85$ (рисунок 5.20, г). С уменьшением относительной величины давления прижима \bar{q} от 0,05 до 0,03 наблюдается увеличение относительной разностенности \bar{s} детали на 14 % при $m_d = 0,7$ (рисунок 5.21, а) и на 11% при $m_d = 0,85$ (рисунок 5.21, б). Дальнейшее увеличение относительной величины давления прижима \bar{q} и коэффициента трения μ сопровождается утонением стенки детали до 1,5 % при $m_d = 0,7$ (рисунок 5.19, а), до 1 % при $m_d = 0,85$ (рис. 5.20, б), до 2 % при $m_d = 0,7$ (рисунок 5.21, в).

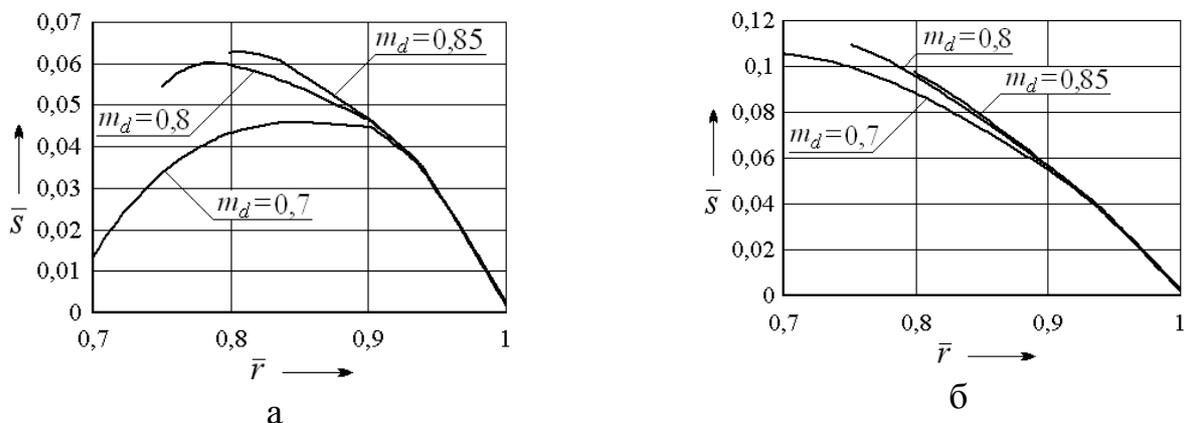


Рисунок 5.19 - Графические зависимости изменения \bar{s} от \bar{r} изготавливаемых деталей из алюминиевого сплава АМгб:

а - $\mu = 0,1$; б - $\mu = 0,05$ ($\bar{q} = 0,015$; $r_n = 1000$ мм; $s_0 = 3,5$ мм)

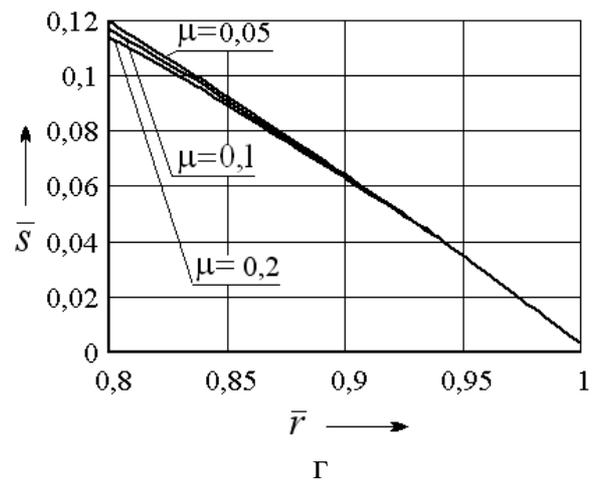
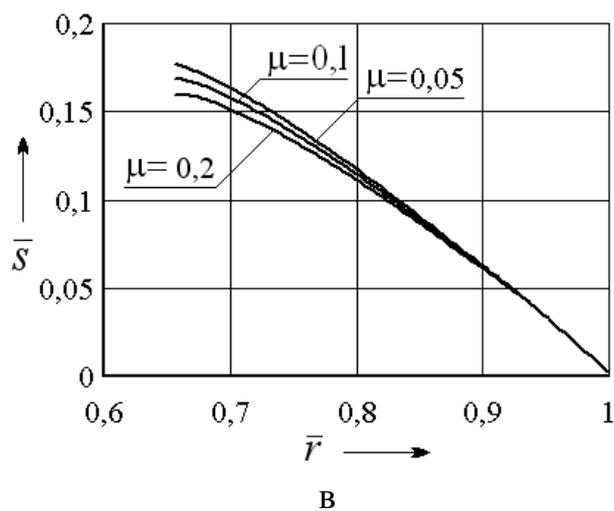
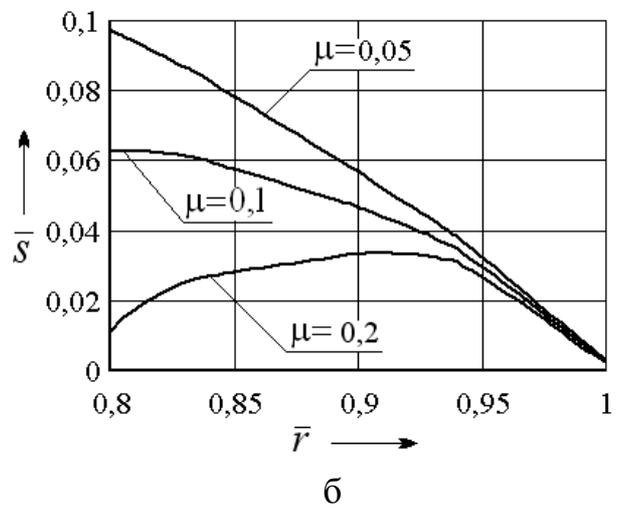
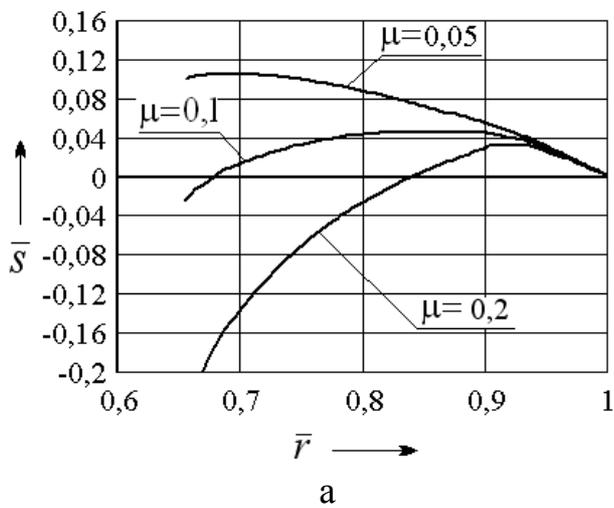


Рисунок 5.20 - Графические зависимости изменения \bar{s} от \bar{r} изготавливаемых деталей из алюминиевого сплава АМгб:
а - $\bar{q} = 0,015$; $m_d = 0,7$; б - $\bar{q} = 0,015$; $m_d = 0,85$;
в - $\bar{q} = 0$; $m_d = 0,7$; г - $\bar{q} = 0$; $m_d = 0,85$
($r_n = 1000$ мм; $s_0 = 3,5$ мм)

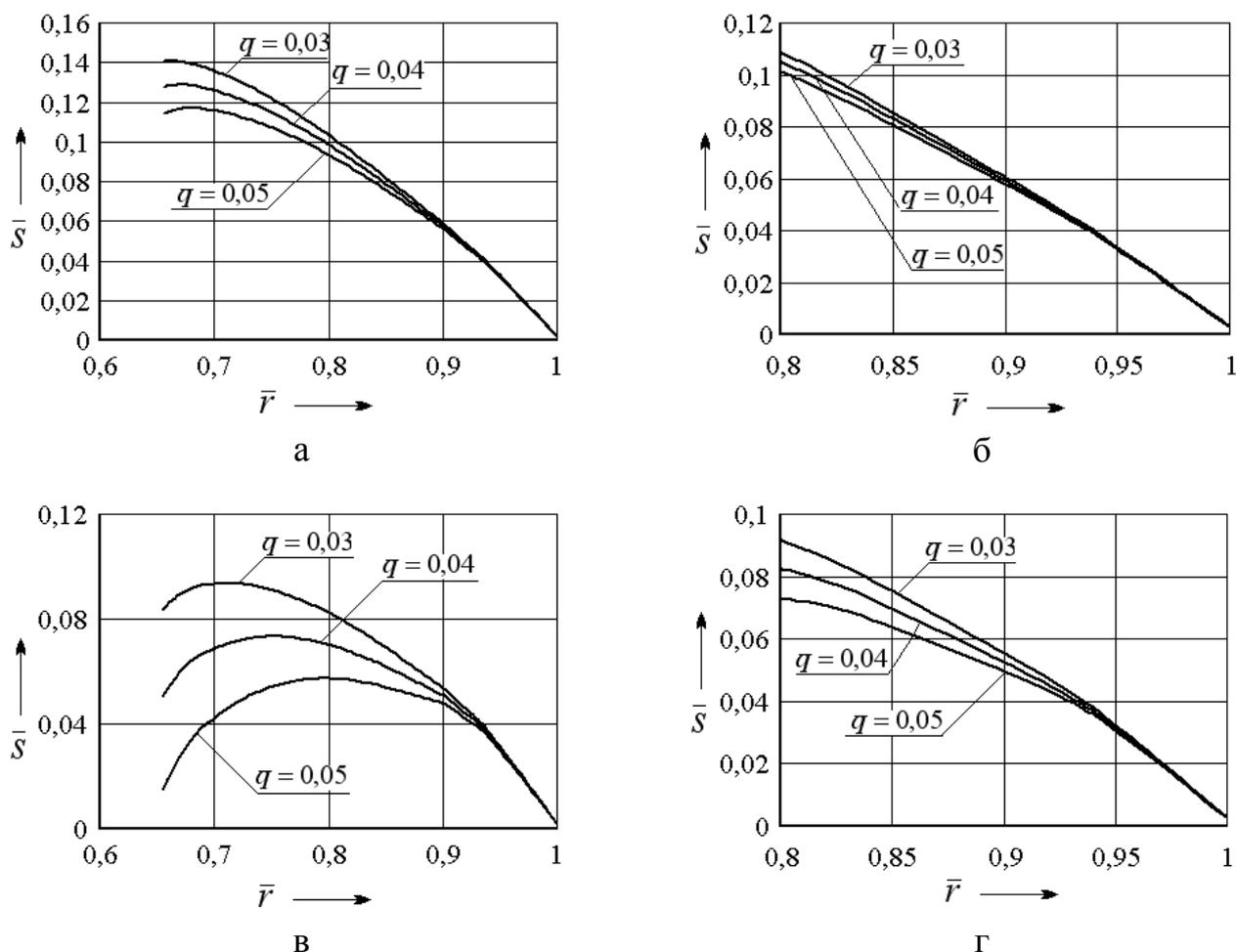


Рисунок 5.21 - Графические зависимости изменения \bar{s} от \bar{r} изготавливаемых деталей из алюминиевого сплава АМг6:

а - $\mu = 0,05$ МПа; $m_d = 0,7$; б - $\mu = 0,05$ МПа; $m_d = 0,85$;

в - $\mu = 0,1$ МПа; $m_d = 0,7$; г - $\mu = 0,1$ МПа; $m_d = 0,85$

($r_n = 1000$ мм; $s_0 = 3,5$ мм)

5.2.7 Влияние анизотропии механических свойств на относительную величину разностенности изготавливаемых деталей

В работе установлено влияние коэффициента нормальной анизотропии механических свойств R на изменение относительной величины толщины изготавливаемой детали \bar{s} . На рисунках 5.22 и 5.23 приведены графические зависимости влияния относительного радиуса рассматриваемой точки \bar{r} в момент совпадения верхней кромки рабочего пояса матрицы с центром радиуса

закругления пуансона R_j при $m_d = 0,6$ и $m_d = 0,8$ на изменение относительной величины толщины изготавливаемой детали \bar{s} .

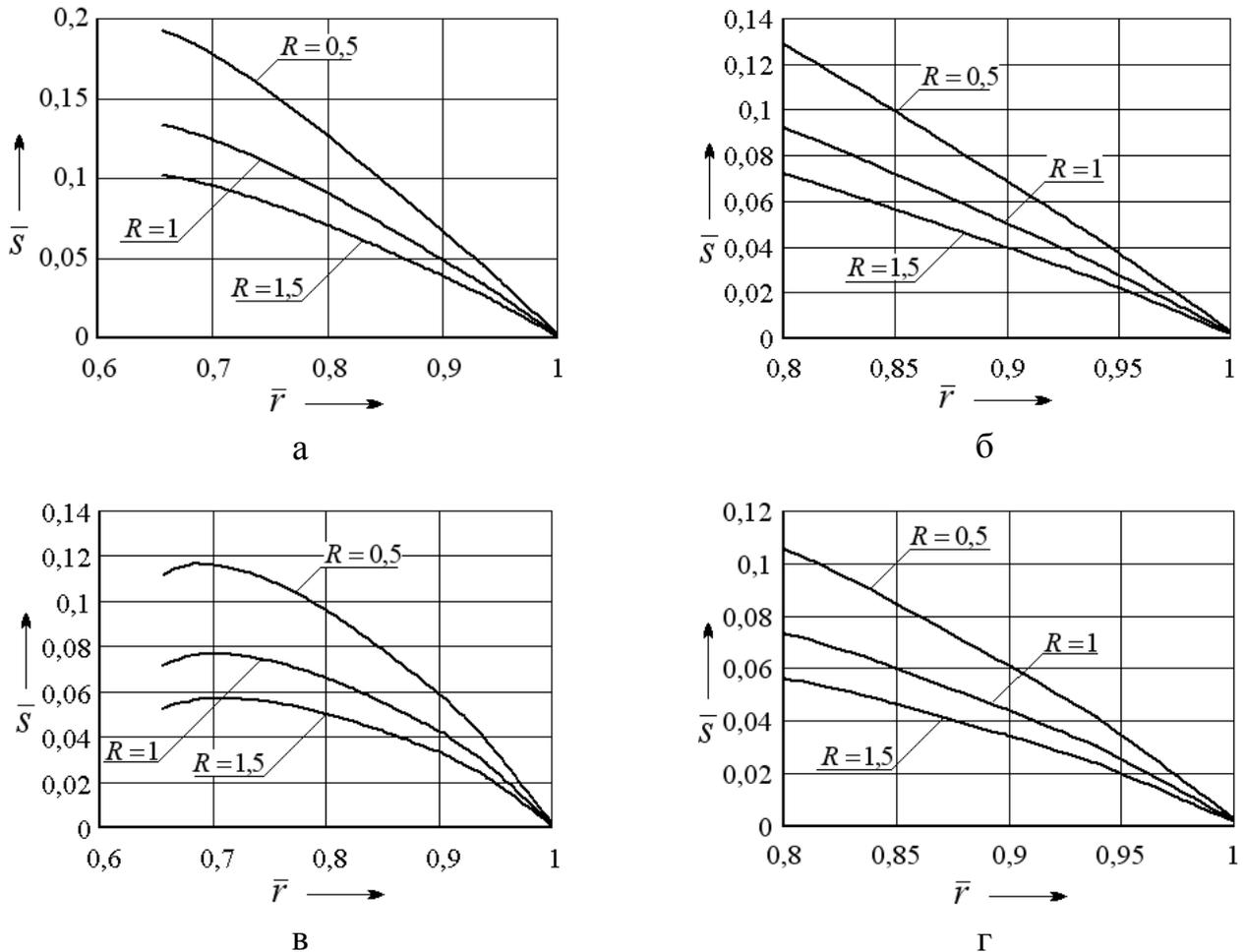


Рисунок 5.22 - Графические зависимости изменения \bar{s} от \bar{r} :

а - $\bar{q} = 0$; $m_d = 0,7$; б - $\bar{q} = 0$; $m_d = 0,85$;
 в - $\bar{q} = 0,015$; $m_d = 0,7$; г - $\bar{q} = 0,015$; $m_d = 0,85$
 ($r_n = 1000$ мм; $s_0 = 3,5$ мм; $\mu = 0,05$; $r_n = 1000$ мм)

Расчеты выполнены при следующих параметрах кривой упрочнения и технологических параметрах процесса: $\sigma_{0,2} = 196$ МПа; $A = 277$ МПа; $n = 0,26$; $\mu = 0,05$; $s_0 = 3,5$ мм; $R_M = 50$ мм.

Анализ графических зависимостей, приведенных на рисунке 5.22, показывает, что с уменьшением относительного радиуса рассматриваемого сечения \bar{r} и коэффициента анизотропии R от 1,5 до 0,5 при ($\bar{q} = 0$ и $\mu = 0,05$) наблюдается увеличение относительной разностенности \bar{s} детали при коэффициенте вытяжки $m_d = 0,7$ на 18 %, а при $m_d = 0,85$ на 13 %.

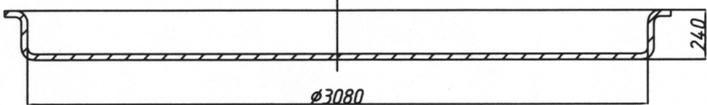
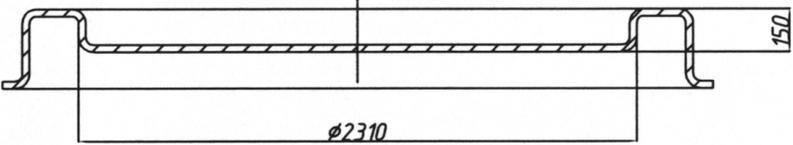
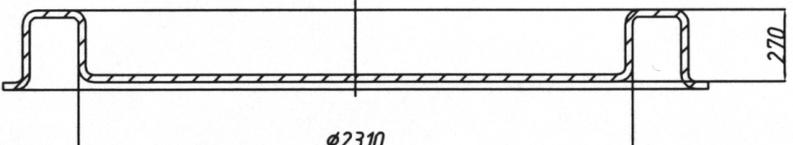
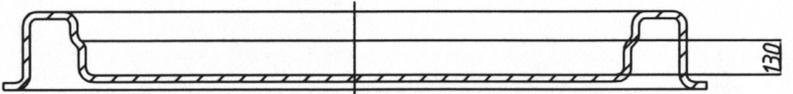
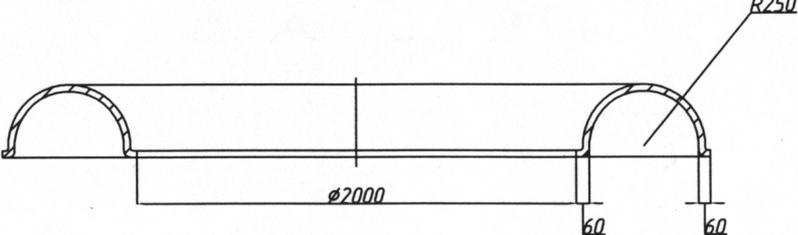
6 Экспериментальные исследования силовых режимов операции реверсивной вытяжки осесимметричных деталей с фланцем

С целью оценки работоспособности разработанных математических моделей деформирования выполнены экспериментальные исследования силовых режимов первой и последующих операций вытяжки осесимметричных деталей в производственных условиях из алюминиевого сплава АМгб. Регистрация силовых режимов производилась по манометру на каждой операции технологических процессов вытяжки полуторовых тонкостенных деталей.

Последовательность формообразующих операций технологического процесса изготовления заготовок детали «Полутор» и расчетные $\bar{P}_{\text{расч}} = P_{\text{расч}} / (2\pi r_n s_0 \sigma_{0,2})$ и экспериментальные $\bar{P}_{\text{эксн}} = P_{\text{эксн}} / (2\pi r_n s_0 \sigma_{0,2})$ величины силы на операциях вытяжки и реверсивной вытяжки полуторовых днищ из алюминиевого сплава АМгб приведены в таблице 6.1. Расчеты выполнены при $\mu_M = 0,05$.

Сравнение результатов теоретических расчетов и экспериментальных данных по силовым режимам операций вытяжки (таблица 6.1) указывает на их удовлетворительное согласование (до 12 %).

Таблица 6.1 - Технологический процесс изготовления заготовок детали «Полутор»

Перечень операций	Эскизы полуфабрикатов	$\bar{P}_{\delta a \tilde{n} \div} /$ $\bar{P}_{y \tilde{e} \tilde{n} \tilde{i}}$
1 Термообработка (отжиг) 2 Вытяжка первая (пресс гидравлический силой 10 МН)		0,963/ 1,107
3 Термообработка (отжиг) 4 Вытяжка реверсивная (пресс гидравлический силой 10 МН)		1,19/ 1,368
5 Термообработка (отжиг) 6 Вытяжка реверсивная (пресс гидравлический силой 10 МН)		1,09/ 1,253
7 Термообработка (отжиг) 8 Вытяжка реверсивная (пресс гидравлический силой 10 МН)		0,812 / 0,859
9 Термообработка (отжиг) 10 Калибровка (пресс гидравлический силой 10 МН)		

7 Разработка экспериментальных основ формирования кристаллографической текстуры и анизотропии механических свойств материалов заготовок для изготовления изделий машиностроения ответственного назначения методами пластического формообразования

7.1 Установление влияния кристаллографической текстуры на коэффициент нормальной пластической анизотропии гексагональных плотноупакованных – металлов

Способность листовых материалов к глубокой вытяжке характеризуется коэффициентом нормальной пластической анизотропии R_{ϕ} , определяемым отношением приращений пластических деформаций по ширине и по толщине образца при испытаниях на растяжение [2]. При этом удовлетворительная штампуемость достигается при $R = R_{\tilde{n}\delta} \geq 1$, где R_{cp} получают усреднением значений коэффициента нормальной пластической анизотропии, полученных при испытаниях в различных направлениях (обычно под углами 0, 45 и 90° к направлению прокатки).

Как показывает анализ экспериментальных данных для сплавов титана (таблица 7.1), величина R_{cp} в значительной мере определяется характеристиками кристаллографической текстуры. Создание в листах титановых сплавов текстуры с малыми углами наклона базисных плоскостей к поверхности листа приводит к $R_{cp} > 1$, тогда как появление ориентировок с большими значениями этих углов снижает коэффициент нормальной пластической анизотропии до величин, меньших единицы. Увеличение R_{cp} путем создания в материале «идеальной» базисной или близкой к ней текстуры отмечается и в работах [2, 66].

Известные корреляционные соотношения между R_{cp} и текстурой, как правило, учитывают интенсивность основных ориентировок текстуры [2]. В то же время экспериментально установлено, что изменение интенсивности и рассеяние основных, а также появление дополнительных побочных ориентировок влияют на

величину коэффициента нормальной пластической анизотропии [2, 66]. Целью данной работы является установление такой связи R_{cp} с текстурой, которая учитывала бы не только интенсивность, но и рассеяние отдельных ориентировок.

Таблица 7.1 - Связь коэффициента нормальной пластической анизотропии с кристаллографической текстурой в некоторых сплавах титана

Сплав	Основные ориентировки	R_{cp}
BT6c	(0001) \pm 20° НН-НП [10 $\bar{1}$ 0]	3,8
BT6c	(0001) \pm 20° НН-НП [10 $\bar{1}$ 0] (0001) \pm 60° НН-ПН [10 $\bar{1}$ 0]	0,99
BT6c	(0001) \pm 20°-30° НН-НП [10 $\bar{1}$ 0] (0001) \pm 50°-60° НН-ПН [10 $\bar{1}$ 0]	0,55
ПТ-3В	(0001) \pm 20° НН-НП [10 $\bar{1}$ 0] (0001)[10 $\bar{1}$ 0]	2,8
Технический титан	(0001) \pm 40°-45° НН-ПН [10 $\bar{1}$ 0]	0,97
Технический титан	(0001) \pm 30° НН-ПН [10 $\bar{1}$ 0]	2,3
BT5-1	(0001)[10 $\bar{1}$ 0]	5,1

Достаточно простая информация об этой связи может быть получена из следующих соображений. Как известно, степень анизотропии свойств ГПУ-металлов определяется пространственным распределением гексагональной оси [2]. Для любой случайной ориентации оси «с» в поликристалле выполняется соотношение $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, где α , β и γ - углы между осью С и направлением прокатки (НП), поперечным направлением (ПН) и направлением нормали к плоскости листа (НН) соответственно (рисунок 7.1). Очевидно, что в случае равновероятного распределения оси С в пространстве (бестекстурное состояние, для которого $R = 1$) $\langle \cos^2 \alpha \rangle = \langle \cos^2 \beta \rangle = \langle \cos^2 \gamma \rangle = 1/3$. Угловыми скобками отмечены средние значения указанных величин. Наличие текстуры нарушает это равенство. Учитывая монотонный характер изменения коэффициента нормальной пластической анизотропии в зависимости от угла наклона базисных плоскостей к поверхности листа и экспериментально наблюдаемое увеличение R_{cp}

при уменьшении угла γ , можно сделать вывод, что случаю $R_{\tilde{n}\delta} > 1$ должно соответствовать $\langle \cos^2 \gamma \rangle > 1/3$.

Таким образом, качественная оценка пригодности материала к обработке, связанной с глубокой вытяжкой, может проводиться по средним значениям косинуса угла между гексагональной осью и НН. Наиболее удобным методом представления текстуры в данном случае является обратная полюсная фигура (ОПФ).

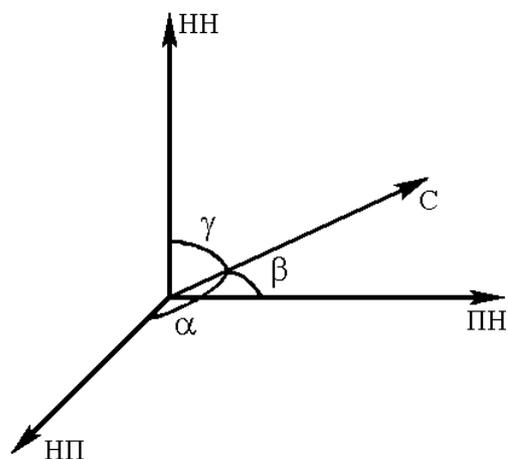


Рисунок 7.1 - Ориентации оси С в поликристалле

Для ГПУ-металлов ОПФ позволяет получить информацию о полюсной плотности 17 ориентировок, что представляется достаточным для аппроксимации непрерывного пространственного распределения оси С.

Для определения величины $\langle \cos^2 \gamma \rangle$ сначала вычисляются объемные доли ориентировок, представленных на ОПФ, снятой с направления нормали к плоскости листа:

$$f_{hkl} = A_{hkl} \cdot p_{hkl},$$

где p_{hkl} - полюсная плотность ориентировки $\{hkl\}$; A_{hkl} - нормировочный коэффициент [109]. Искомая величина находится по формуле

$$\langle \cos^2 \gamma \rangle = \sum f_{hkl} \cdot \cos^2 \gamma_{hkl}.$$

Как уже говорилось, увеличению этого параметра должно соответствовать повышение коэффициента нормальной пластической анизотропии, что хорошо согласуется с приведенными в таблице 3.4 экспериментальными данными.

Для установления более строгой аналитической связи коэффициента нормальной пластической анизотропии с параметрами текстуры воспользуемся известной зависимостью, полученной в работе [159]:

$$R(\varphi) = \frac{\left(\frac{H}{F}\right) + \left[2\left(\frac{N}{F}\right) - 1 - \left(\frac{G}{F}\right) - 4\left(\frac{H}{F}\right)\right] \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi + \left(\frac{G}{F}\right) \cos^2 \varphi}. \quad (7.1)$$

Здесь φ - угол между направлением испытания и НП, H , G , F и N - коэффициенты Хилла, характеризующие состояние поликристаллического материала ортотропной симметрии.

Отношения коэффициентов Хилла, необходимые для расчета R , представим как функции от текстурных параметров и величин, характеризующих анизотропию монокристалла [109]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{H}{F} &= \frac{1 + (1 - 2\Delta_1)(A_2 - 1) + (\Delta_4 + \Delta_5 - \Delta_2)(1 - A_1)}{1 + (2\Delta_1 + 2\Delta_3 - 1)(A_2 - 1) + (\Delta_2 + \Delta_4 - \Delta_5)(1 - A_1)}; \\ \frac{G}{F} &= \frac{1 + (1 - 2\Delta_3)(A_2 - 1) + (\Delta_2 - \Delta_4 + \Delta_5)(1 - A_1)}{1 + (2\Delta_1 + 2\Delta_3 - 1)(A_2 - 1) + (\Delta_2 + \Delta_4 - \Delta_5)(1 - A_1)}; \\ \frac{H}{F} &= \frac{3 + (2 - 3\Delta_1)(A_2 - 1) + (3 - 6\Delta_1 + 2\Delta_2 - 2\Delta_4 - 2\Delta_5)(1 - A_1)}{1 + (2\Delta_1 + 2\Delta_3 - 1)(A_2 - 1) + (\Delta_2 + \Delta_4 - \Delta_5)(1 - A_1)}. \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

Здесь Δ_i - текстурные параметры, вычисляемые по формулам:

$$\Delta_1 = \langle \cos^2 \gamma \rangle; \quad \Delta_2 = \langle \cos^4 \gamma \rangle; \quad \Delta_3 = \langle \cos^2 \beta \rangle; \quad \Delta_4 = \langle \cos^4 \beta \rangle,$$

$$\Delta_5 = \langle \cos^4 \alpha \rangle;$$

A_1 и A_2 - безразмерные материальные константы, характеризующие степень анизотропии монокристалла в отношении механических свойств. Для изотропного кристалла $A_1 = A_2 = 1$. Отметим, что параметры анизотропии монокристалла указывают не только на степень, но и на характер анизотропии механических свойств. Если пластическая деформация в монокристалле происходит лишь путем скольжения в направлении $\langle 11\bar{2}0 \rangle$, то $A_1 - A_2 = 1$. Изменение механизма деформации, связанное с влиянием различных факторов, например, температуры испытания или степени легирования, будет сопровождаться изменением этих параметров. Значения A_1 и A_2 могут быть определены, в частности, по результатам испытаний на растяжение различно ориентированных монокристаллов.

Подставив (7.2) в выражение (7.1), получим связь коэффициента нормальной пластической анизотропии с текстурными параметрами материала и параметрами анизотропии монокристалла:

$$R(\varphi) = \frac{1 + (1 - 2\Delta_1)(A_2 - 1) + \left(\frac{3}{8} - \frac{3}{4}\Delta_1 - \frac{5}{8}\Delta_2 + \frac{1}{2}\Delta_4 + \frac{1}{2}\Delta_5\right)(1 - A_1) +}{1 + \Delta_1(A_2 - 1) + \Delta_2(1 - A_1) + (1 - \Delta_1 - 2\Delta_3)(A_2 - 1) +} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{+ \frac{1}{8}(6\Delta_1 - 3\Delta_2 + 4\Delta_5 + 4\Delta_4 - 3)(1 - A_1) \cos 4\varphi}{+ (\Delta_5 - \Delta_4)(1 - A_1) \cos 2\varphi}.$$

При оценке пригодности листового материала к глубокой вытяжке достаточную информацию дает среднее значение коэффициента нормальной пластической анизотропии, которое может быть получено усреднением выражения $R(\varphi)$. Но для такого определения R_{cp} требуется знание всех текстурных параметров, а следовательно, и съемка ОПФ с трех направлений (НН, ПН, НП) либо полной прямой полюсной фигуры $\{0002\}$ с информацией об ее периферийной зоне, что представляет определенные трудности при подготовке образцов, особенно в случае исследования тонких листов.

Однако можно существенно упростить расчет R_{cp} , если провести усреднение текстурных параметров по углу φ (т.е. реальной текстуре листового материала поставить в соответствие аксиальную текстуру, получающуюся из исходной вращением вокруг нормали к плоскости листа). Очевидно, что такой подход возможен для любых материалов с ГПУ-структурой, подвергнутых различным видам обработки, которые приводят к формированию однородных текстур по толщине образца. Учитывая, что для осесимметричной текстуры $\Delta_3 = 1/2 (1 - \Delta_1)$, $\Delta_4 = \Delta_5 = 3/8 (1 - 2\Delta_1 + \Delta_2)$ (что следует из условия равновероятного распределения оси S вокруг направления нормали к плоскости листа), получим

$$R_{cp} = \frac{1 + (1 - 2\Delta_1)(A_2 - 1) - \frac{1}{4}(6\Delta_1 + \Delta_2 - 3)(1 - A_1)}{1 + \Delta_1(A_2 - 1) + \Delta_2(1 - A_1)}. \quad (7.3)$$

Как видно, в этом случае количество текстурных параметров существенно сокращается. Необходимые для расчета R_{cp} параметры текстуры можно получить по изложенной выше методике с помощью ОПФ, снятой с направления нормали к плоскости листа.

Формула (7.3) отражает основные особенности зависимости R_{cp} от характера текстурированности материала: монотонное изменение этой величины с ростом интегральных характеристик текстуры; обращение R_{cp} в единицу при всех ориентациях изотропного монокристалла ($A_1 = A_2 = 1$); обращение R_{cp} в ноль и бесконечность при значениях Δ_1 и Δ_2 , отвечающих предельным текстурам призматического и базисного типов. Последнее реализуется при моделировании процесса деформации только скольжением в направлении $\langle 11\bar{2}0 \rangle$. Из полученного соотношения также видно, что R_{cp} равно 1 и в случае бестекстурного состояния, когда $\Delta_1 = 1/3$; $\Delta_2 = 1/5$.

В качестве проверки предложенной методики вычисления коэффициента нормальной пластической анизотропии по данным о текстуре и свойствах зерен было проведено сравнение рассчитанных и полученных экспериментально значений $R_{\tilde{n}p}$. Объектом исследования были выбраны листы титанового сплава ПТ-3Вкт с отличающимися между собой текстурными состояниями. Информация о текстуре представлена в таблице 7.2. Экспериментальные значения R определяли согласно методике, описанной в работе [175].

Одноосному растяжению подвергались плоские стандартные образцы, вырезанные под углом 0, 45 и 90° по отношению к направлению прокатки по шесть штук каждого вида, в соответствии с ГОСТ 11701-84 (при $s_0 < 4$ мм) и ГОСТ 1497-84 (при $s_0 > 4$ мм).

Таблица 7.2 -Текстурные параметры листов сплава ПТ-3Вкт

№ листа	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5
1	0,449	0,319	0,362	0,237	0,081
2	0,519	0,376	0,339	0,222	0,049
3	0,595	0,430	0,224	0,103	0,075
4	0,730	0,585	0,118	0,042	0,053

Схема раскроя листов и вырезки образцов приведена на рисунке 7.2. Точность размеров образцов обеспечивается их обработкой в специальных шаблонах.

Предварительно перед испытаниями на образец в зоне расчетной длины l_0 необходимо нанести квадратные ячейки со стороной 10 мм (рисунок 7.3).

Ячейки с точностью до 0,025...0,03 мм наносят алмазным индентором на измерительном микроскопе УИМ-21 по методике, изложенной в работе [175].

До и после испытаний размеры ячеек образцов измеряются на том же микроскопе.

Растяжение образцов производилось на универсальных испытательных машинах с записью индикаторных диаграмм и регистрацией в процессе деформирования продольных и поперечных деформаций [175].

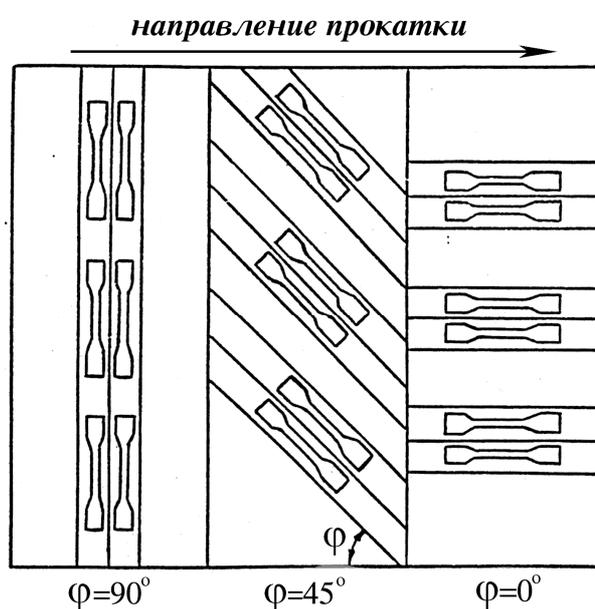


Рисунок 7.2 - Схема раскроя листов и вырезки образцов для испытания на анизотропию

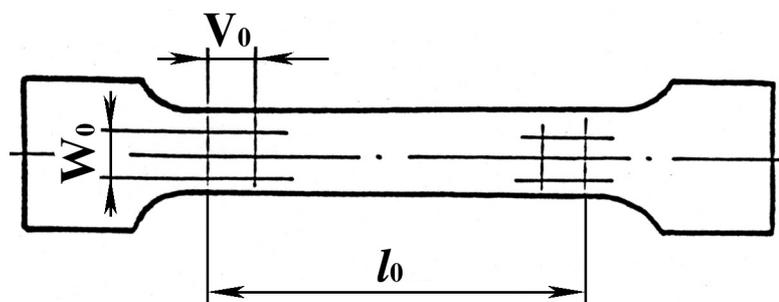


Рисунок 7.3 - Схема нанесения ячеек на образце

Величины пределов текучести $\sigma_{\varphi 0,2}$ определяются в соответствии с ГОСТ 1497-84.

При испытании на одноосное растяжение нагружение производилось по этапам. На каждом этапе фиксировались сила, изменения ширины и толщины образца в области нанесенных ячеек и находились величины коэффициентов анизотропии

$$R_{\varphi} = \varepsilon_b / \varepsilon_z, \quad (7.4)$$

где $\varepsilon_b = \ln(b/b_0)$, $\varepsilon_z = \ln(h/h_0)$, b_0 и h_0 , b и h - исходная и текущая на каждом этапе растяжения в процессе деформации ширина и толщина образца в пределах равномерной деформации. Заметим, что замеры ширины b и толщины h в процессе эксперимента измерялись микрометром со сферическим наконечником малого радиуса.

Также определяется величина коэффициента анизотропии R_{φ} , вырезанного под углом φ , при максимальной деформации по замерам ячейки:

$$R_{\varphi} = \varepsilon_w / \varepsilon_z.$$

Деформации образцов по ширине ε_w , длине ε_v и толщине ε_z определяются по формулам:

$$\varepsilon_w = \ln(W/W_0); \quad \varepsilon_v = \ln(V/V_0); \quad \varepsilon_z = -\varepsilon_w - \varepsilon_v,$$

где W_0 , W , V_0 , V - размеры ячейки поперек и вдоль образца до и после этапа деформации.

Для получения наиболее достоверных результатов используют ту часть разорванного образца, в которой ячейка была наиболее удалена от очага локальной деформации (места разрыва).

О точности проведенных экспериментальных исследований судили по сопоставлению определенных величин коэффициентов анизотропии R_φ , при максимальной равномерной деформации, вычисленных по замерам ширины и толщины образца и по замерам ячейки.

Ввиду трудности выращивания монокристаллов сплавов титана, значения материальных констант A_1 и A_2 были получены с применением выражения $R(\varphi)$ и экспериментальных значений коэффициента нормальной пластической анизотропии, полученных на образцах, вырезанных под углами 0° и 90° к НП (таблица 3.6, лист №4). Как видно из табл. 7.3 наблюдается удовлетворительное соответствие между экспериментальными и рассчитанными значениями. Причем, как и следовало ожидать, рост параметров Δ_1 и Δ_2 сопровождается увеличением R_{cp} .

Таблица 7.3 - Сравнение экспериментальных и расчетных значений коэффициента нормальной пластической анизотропии листов сплава ПТ-3В

№ листа	R_0		R_{90}		R_{cp}	
	эксп.	расч.	эксп.	расч.	эксп.	расч.
1	1,2	1,21	2,0	2,04	1,60	1,5
2	1,2	1,40	2,2	2,80	1,70	1,9
3	2,1	2,27	2,5	2,60	2,30	2,4
4	4,1		3,9		4,15	4,08

Таким образом, величины коэффициентов анизотропии $R(\varphi)$ могут быть определены как по данным о текстуре и свойствах зерен исследуемого материала, так и по методике, описанной в работе [109].

7.2 Влияние длительности отжига на текстуру листов из сплава ПТ – 3Вкт

В последнее время сплавы на основе титана все шире применяются в изделиях, работающих при криогенных температурах. Одним из перспективных титановых сплавов для работы при низких температурах является сплав ПТ-3Вкт, содержащий в качестве легирующих компонентов алюминий и ванадий. Основным методом изготовления из него крупногабаритных изделий является штамповка листовых полуфабрикатов. Исследования показали [2], что способность титановых сплавов к глубокой вытяжке в значительной мере связана со степенью выраженности текстуры листа. Более того, наличие определенного типа текстуры благоприятно сказывается на физико-механических свойствах изделия [2, 66]. В частности, при наличии базисной текстуры (0001) $[10\bar{1}0]$ или близкой к ней возрастает его конструкционная прочность (наблюдается так называемое текстурное упрочнение).

Часто при изготовлении изделий (например, тонкостенных полусферических баков) применяется многоступенчатая вытяжка. При этом перед каждым переходом производится термическая обработка, которая может привести к неблагоприятным (с точки зрения дальнейшей деформации и свойств изделия) изменениям текстуры. В литературе же сведения о процессах рекристаллизации и текстуре рекристаллизации сплава ПТ-3Вкт отсутствуют, хотя важность их для понимания и управления процессами структурообразования не вызывает сомнений.

В данной работе приводятся результаты исследования влияния длительности отжига на текстуру листов сплава ПТ-3Вкт толщиной 4 мм в исходном состоянии. Такие отжиги моделируют изменения текстуры донной части изделия (не испытывающей пластической деформации) при многоступенчатой вытяжке.

Текстура изучалась рентгеновским методом с помощью прямых полюсных фигур {0002}, полученных в результате съемки “на отражение” на дифрактометре ДРОН-0,5 в медном отфильтрованном излучении.

Отжижки образцов исследованного сплава проводились в вакуумной трубчатой печи при температуре 650 °С; при этой температуре достаточно активно развивается рекристаллизационные процессы.

На рисунке 7.4 приведены результаты исследования текстуры в зависимости от длительности отжига при указанной температуре. После рекристаллизационного отжига в течение 1 часа текстура описывается двумя компонентами: $(0001) [10\bar{1}0]$ и $(0001) \pm 60^\circ$ НН-ПН $[10\bar{1}0]$ и совпадает с текстурой листа до отжига. Здесь НН - направление нормали к поверхности листа, ПН - поперечное направление относительно направления прокатки.

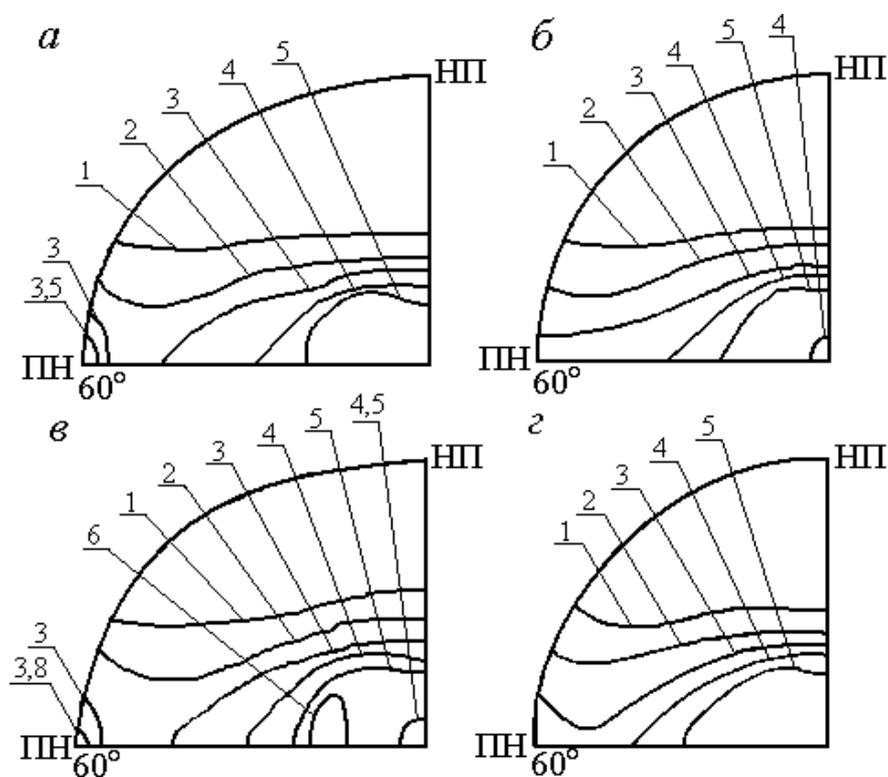


Рисунок 7.4 - Влияние длительности отжига на текстуру листов титанового сплава ПТ-3кт:

а - $\tau = 1$ ч; б - $\tau = 2$ ч; в - $\tau = 3$ ч; г - $\tau = 7$ ч

Изучалось изменение текстуры листа от продолжительности отжига от одного часа до семи часов.

Анализ результатов экспериментальных исследований показал, что отжиг в течение двух часов при 650 °С практически не меняет текстуру рекристаллизации сплава ПТ-3Вкт. Однако уже трехчасовой отжиг приводит к появлению третьей

компоненты текстуры рекристаллизации (0001) - 20° НН-ПН $[10\bar{1}0]$ (рисунок 7.4). Дальнейшее же увеличение длительности отжига до 6...7 часов ведет к формированию единственной компоненты (0001) $[10\bar{1}0]$, т.е. исчезают ориентировки, неблагоприятные для штампуемости.

Такой характер изменения текстуры рекристаллизации может быть объяснен следующим образом. Как и в сплавах титана, содержащих более 2 % алюминия [2], в листах сплава ПТ-3Вкт после отжига при температурах, близких к температуре начала рекристаллизации, основной компонентой текстуры является ориентировка (0001) $[10\bar{1}0]$. При небольших длительностях отжига наряду с ней присутствуют и другие компоненты, которые, однако, не “выживают” в процессе конкурентного роста зерен.

Подобные особенности развития текстуры рекристаллизации наблюдались и для других металлов и сплавов [2, 66]. Объяснение состоит, по-видимому, в том, что подвижность границ зерен зависит не только от разориентации соседних зерен, ориентации самой границы относительно кристаллических решеток этих зерен, но и от вида и количества примесей и легирующих элементов.

Таким образом, при увеличении длительности отжига при температуре 650°C в листах сплава ПТ-3Вкт наблюдаются изменения текстуры, способствующие усилению благоприятных для штампуемости ориентировок.

Следовательно, многократные отжиги донной части штамповок не будут приводить к снижению качества изделия.

7.3 Исследование изменений текстуры многопереходной штамповки-вытяжки полусферических днищ из листов титанового сплава ПТ – 3Вкт

Кристаллографическая текстура гексагональных плотноупакованных (ГПУ) металлов, влияющая на основные механические характеристики, такие как предел прочности σ_B , условный предел текучести $\sigma_{0,2}$, коэффициент нормальной анизотропии R , может определить способность анизотропии металла к пластическому формоизменению, в частности к процессу глубокой вытяжки.

Коэффициент нормальной пластической анизотропии, количественно связанный с текстурными параметрами [2, 109], может являться надежным критерием штампуемости. Обнаружено, что при деформации, когда кристаллографическая ось C близка к направлению растяжения, основной механизм деформации – двойникование дает небольшое упрочнение материала. При этом отношение $\sigma_{\dot{\epsilon}}/\sigma_{0,2}$ будет меньше, чем в случае, когда основным механизмом является скольжение. Текстура изделия также существенно влияет на важнейшие его эксплуатационные характеристики (в нашем случае сферических баков).

Текстура отштампованного сосуда с сильно развитой ориентировкой $\langle 0001 \rangle$ в направлении к нормали приводит к текстурному упрочнению, т.е. увеличению пределов прочности и текучести при двухосной деформации по сравнению с предсказанными теоретически [2, 66]. Текстура, имеющая сильную наклонную базисную компоненту, будет наименее благоприятной в листе, используемом для изготовления сосудов высокого давления (с точки зрения коррозионного растрескивания под действием напряжений). В результате экспериментальных исследований [92] установлено, что текстура в изделии, испытывающем в основном напряжения в направлении кристаллографической оси C , обуславливающая двойникование, как основной механизм деформации, обнаруживает существенно меньшую стабильность. На усталостные свойства детали благоприятно влияет повышение совершенства текстуры, что объясняется меньшей вероятностью растрескивания под циклическими нагрузками из-за меньшего числа соседних анизотропных гексагональных зерен, ориентация которых отличается на 90° .

Опыт работы с изделиями из титановых сплавов ВТ5-І, ВТ5-Ікт и ВТ3-І показал, что в условиях сложного напряженного состояния прочность сплава в конструкции может отличаться от прочности образцов. При этом в одних случаях наблюдается упрочнение, в других - разупрочнение по отношению к прочности стандартного образца. Причина данного явления заключается в наличии анизотропии механических свойств, являющейся следствием создания при обработке давлением предпочтительных ориентировок кристаллитов – текстуры. Объемная анизотропия механических свойств проявляется в условиях сложного

напряженного состояния, а при одноосном растяжении она не сказывается на прочности образца. Поэтому при прогнозе прочности оболочечных конструкций, а также при разработке технологических процессов их изготовления учет анизотропии механических свойств материала является необходимым и обязательным условием. При необоснованном выборе технологических приемов и режимов изготовления в лучшем случае будут не полностью реализованы возможности материала, в худшем - прочность конструкции будет ниже расчетной величины. Кроме того, технологичность титановых полуфабрикатов в значительной мере определяется реализованной в нем величиной анизотропии механических свойств материала детали.

Таким образом, все важнейшие характеристики полусферических днищ из титановых сплавов: пределы прочности при двухосном растяжении и текучести, вязкость разрушения, усталостная прочность, сопротивление коррозионному растрескиванию, имеют прямую качественную, а в некоторых случаях и установленную количественную связь с показателями результирующей текстуры отштампованного днища. Необходимо отметить, что исходная текстура титанового листа в результате пластической деформации в процессе многопереходной вытяжки претерпевает существенные изменения. Рассматривая технологический процесс как основной фактор, формирующий текстуру, а следовательно, и основные свойства днища и зная основные закономерности формирования текстуры при вытяжке, можно с высокой степенью надежности прогнозировать как пластичность металла при заданных условиях штамповки, так и обеспечение необходимый уровень конструкционной прочности.

Исследовали закономерность формирования текстуры при многооперационной вытяжке полусферических днищ диаметром 1176 мм из листов титанового сплава ПТ-3Вкт толщиной $s_0 = 3,5$ мм методом многооперационной вытяжки с последующей калибровкой взрывом. Кристаллографическая текстура образцов, вырезаемых из различных зон полуфабрикатов после первого и второго переходов вытяжки и откалиброванного днища, изучалась рентгеновским методом с помощью анализа прямых и обратных полюсных фигур, полученных в результате

съемок “на отражение”. Дифрактограммы для построения полюсных фигур снимали на аппарате ДРОН-0,5 в отфильтрованном медном излучении с применением дифференциальной дискриминации. Для съемок использовали текстурную приставку ГП-2.

Особенностью метода ступенчатого набора является то, что все зоны откалиброванного днища претерпевают разнохарактерную в каждом переходе деформацию. Схема вырезки образцов и схематическое изображение характера деформации по всем зонам со средними значениями по переходам логарифмическими деформациями ($\epsilon_\theta, \epsilon_\rho$) дано на рисунке 7.5. Замеры показали, что деформация по толщине ϵ_t не превышает 0,02 мм на операции и ею можно пренебречь. Так, например, участок *kc* в *I* переходе является дном штамповки, во *II* переходе перетягивается из свободного участка в стенку и растягивается в стенке, в *III* перетягивается из стенки в стенку с двойным перегибом через радиусный прижим и растягивается и стенку, в *IV* перетягивается из стенки в стенку с двойным перегибом через радиусный прижим.

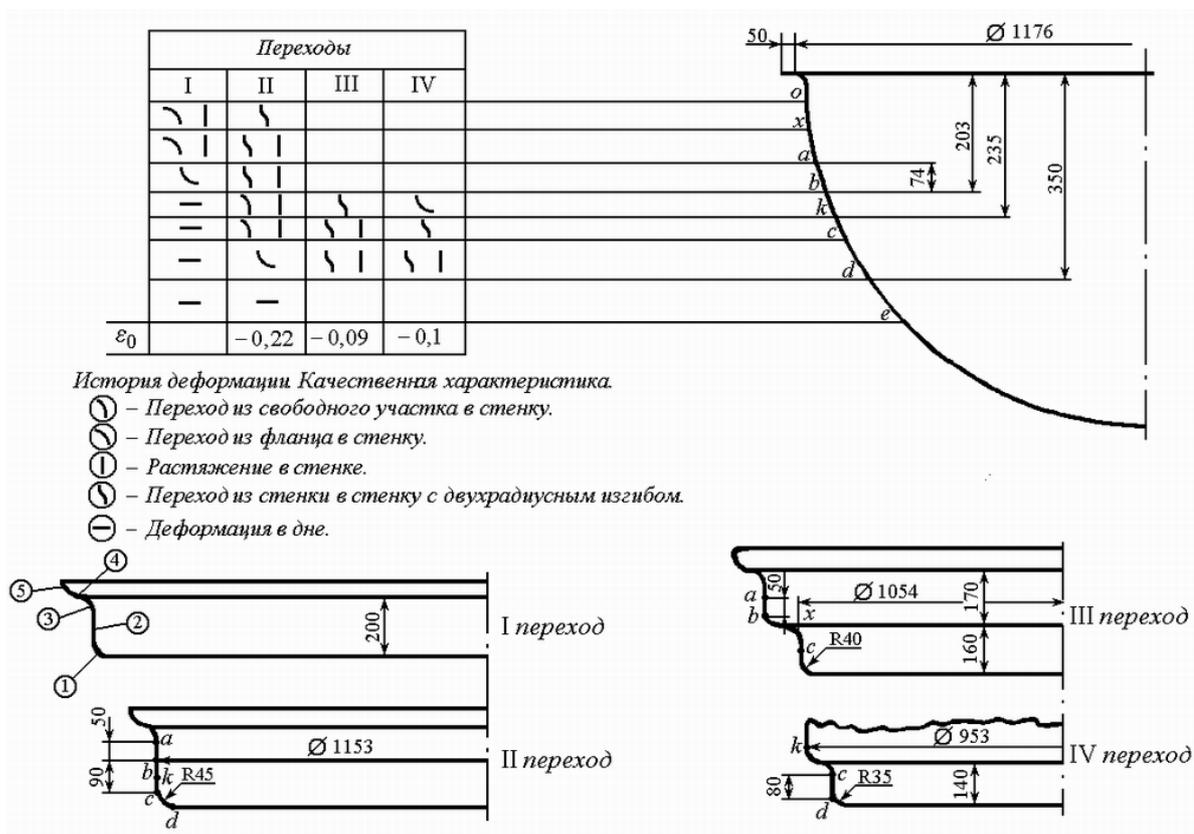


Рисунок 7.5 - Схема ступенчатого набора и деформаций по переходам для зон изделия

Поскольку промежуточные разупрочняющие отжиги существенно не влияют на изменение текстуры, можно считать, что конечная текстура полуфабриката в каждой зоне будет результатом суммарного ее изменения в результате пластической деформации, претерпеваемой по переходам.

Полюсные фигуры, полученные на образцах, вырезанных из различных зон полуфабриката после первой операции, показаны на рисунке 7.6. Здесь зона 5 – участок фланца, еще не претерпевший значительной деформации из-за гофрообразования, что и подтверждается сходством его текстуры с текстурой дна. Это текстурное состояние, описываемое наклонной компонентой с углом наклона $20^\circ (0001) \pm 20^\circ$ НН-ПН ($\bar{1}0\bar{1}0$), из-за незначительности деформации металла дна (3 %) можно считать текстурой исходного листа. Зона 4 – деформированный участок фланца под прижимом, зона 3 – перетяжной радиус матрицы, зона 2 – цилиндрический участок штамповки, зона 1 – участок на радиусе пуансона.

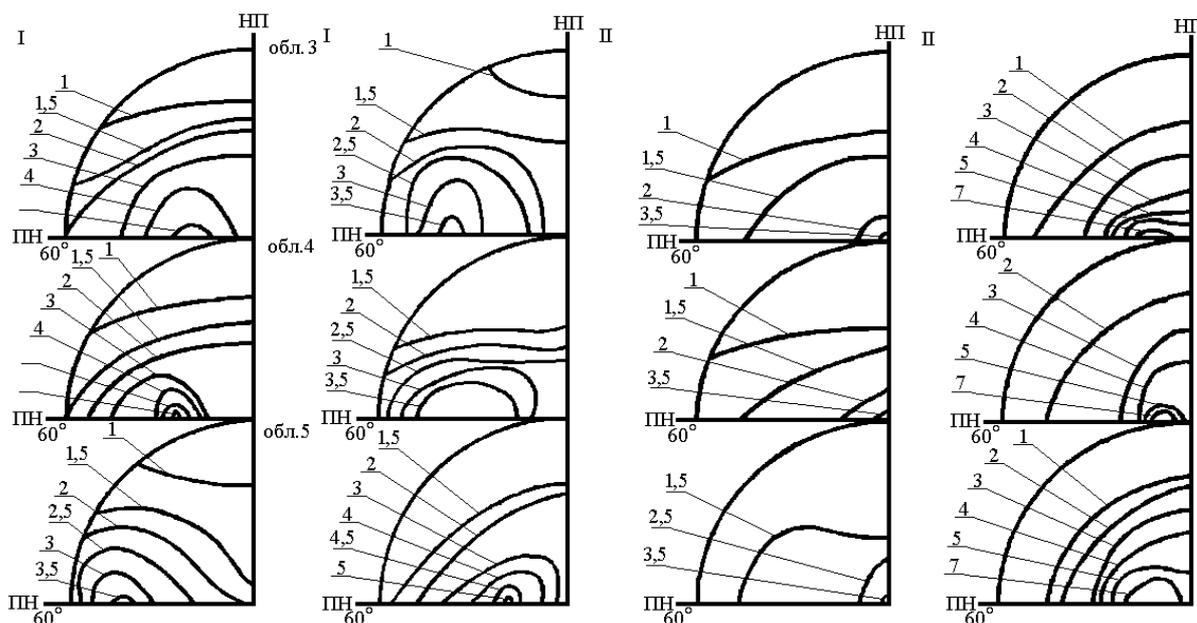


Рисунок 7.6 - Полюсные фигуры 0002 из зон штамповки после I перехода

Сравнение зон 5 и 4 показывает, что действие деформаций $-\varepsilon_\theta$ и $+\varepsilon_r$ приводит к большему рассеянию и наклону базисной компоненты от 20° до 40° , а также к значительному увеличению компоненты $\langle 11\bar{2}0 \rangle$ (рисунок 7.7). Можно

считать, что основным механизмом деформации во фланце является двойникование по плоскости $\{11\bar{2}2\}$ совместно с базисным скольжением.

Переход через радиусный' прижим не меняет характера текстуры, увеличивая ее совершенство и наклон плоскостей $\{0001\}$ до 40° . В стенке (обл. 2) основной деформацией является растяжение ($+\epsilon_r$). Здесь наблюдается увеличение наклона базисных плоскостей и ослабление базисных ориентировок по сравнению с фланцем. Интенсивность наклонной компоненты, уменьшившаяся по сравнению с исходным материалом, остается на том же уровне, что и во фланце. Растяжение же в стенке значительно увеличивает интенсивность призматической компоненты $(10\bar{1}0)$. Известно [2], что скольжение по системам $\{10\bar{1}0\} \langle 11\bar{2}0 \rangle$ и $\{10\bar{1}1\} \langle 11\bar{2}0 \rangle$ при растяжении приводит к созданию сильной $\langle 10\bar{1}0 \rangle$ и слабой $\langle 11\bar{2}0 \rangle$ ориентировок, параллельных оси растяжения.

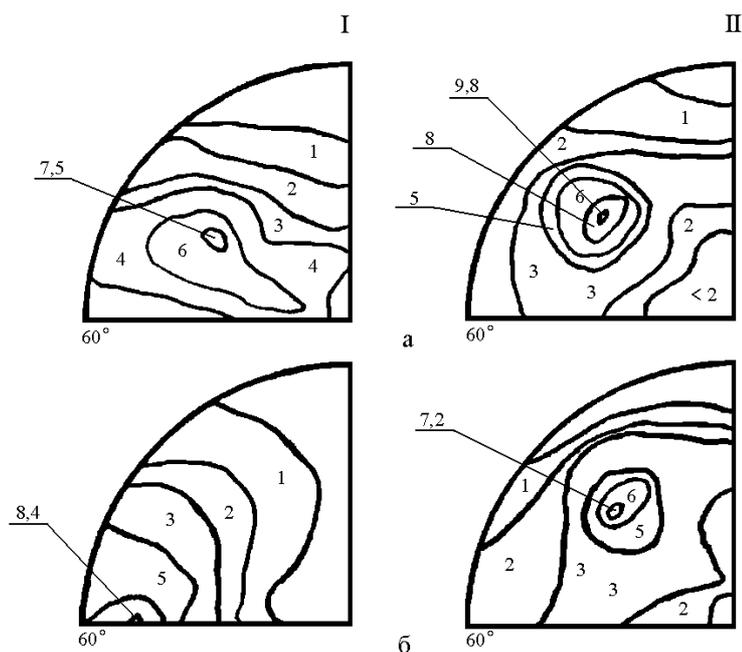


Рисунок 7.7 - Полюсные фигуры 0002 для внутренней (а) и внешней (б) поверхностей из зоны ха

Таким образом, основным механизмом деформации в стенке при вытяжке является скольжение. Скольжение вызывает значительно большее деформационное упрочнение, чем двойникование. Это косвенно подтверждает вывод, сделанный в работах [2, 66], что способность к глубокой вытяжке зависит, прежде всего, от

упрочнения, получаемого металлом в стенке. В зоне радиуса закругления пуансона (обл. I) текстура незначительно отличается от исходной несколько большим наклоном базисных плоскостей.

Как видно из полюсных фигур (рисунок 7.6), характер текстуры среднего слоя исходной заготовки практически не меняется в процессе штамповки. Анализ полюсных фигур, полученных на образцах, вырезанных из различных зон откалиброванной полусферы (рисунки 7.7 и 7.8), в целом подтверждает закономерность текстурообразования, определенную при штамповке I перехода. Текстура исходного листа, имеющего наклонную компоненту, практически не отличается от текстуры зоны *et*, претерпевающей незначительную (5...7 %) двухосную деформацию растяжения в процессе обработки взрывом.

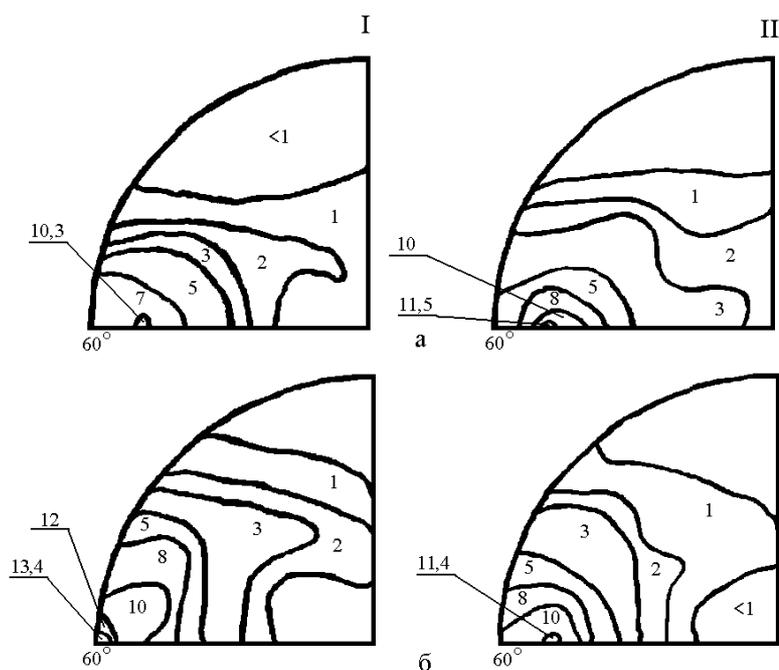


Рисунок 7.8 - Полюсные фигуры для внутренней (а) и внешней (б) поверхностей полусферы из зоны ab

В зоне *xa* обнаружена сильная призматическая компонента $\{11\bar{2}0\}$, слабая $\{10\bar{1}0\}$ и существенная неоднородность текстуры по толщине. Из всех исследованных участков зона *xa* претерпела наибольшую пластическую деформацию. В первом переходе при перетяжке из фланца в стенку $\epsilon_{\theta} = -0,22$ и во

втором – при перетяжке из стенки в стенку через двойной радиусный прижим $\varepsilon_{\theta} = -0,22$. Причем в первом переходе эти участки испытывали интенсивное упрочняющее растяжение в стенке.

Зона *ab*, являющаяся радиусом пуансона первого перехода, во втором переходе перетягивается в стенку через радиусный прижим и растягивается в стенке. При этом наблюдается сильное отличие текстур наружной и внутренней части образца. Текстура внутренней части отличается от текстуры исходного листа только уменьшением интенсивности, в то время как в наружной зоне текстура подобна текстуре зоны *xa*. Это может быть объяснено более благоприятными условиями трения на наружной поверхности.

Текстура зоны *dc* и ниже не отличается от исходной, но имеет меньшую интенсивность наклонной компоненты по сравнению с исходным листом. Следовательно, характер текстуры не меняется в процессе перетяжки из стенки в стенку через двойной радиусный прижим, начиная с *III* во всех последующих переходах.

Установлено, что для уменьшения вероятности образования микротрещин, выводящих деталь за предел допуска по толщине, следует так строить технологический процесс ступенчатого набора титановых листов, чтобы число зон, имеющих максимальное (8...10) число знакопеременных деформаций (перегибов), было минимальным.

7.4 Взаимосвязь характеристик разрушения полуфабриката в процессе многооперационной вытяжки со структурой и текстурой титанового сплава ПТ-3Вкт

Качественная штамповка тонкостенных полусферических днищ с минимальным утонением и отсутствием гофр представляет весьма сложную технологическую проблему.

Для изготовления полусферических тонкостенных полновысотных днищ из титанового псевдо-альфа-сплава ПТ-3Вкт используется метод многопереходной

вытяжки (ступенчатого набора) с промежуточными отжигами и окончательной калибровкой взрывом.

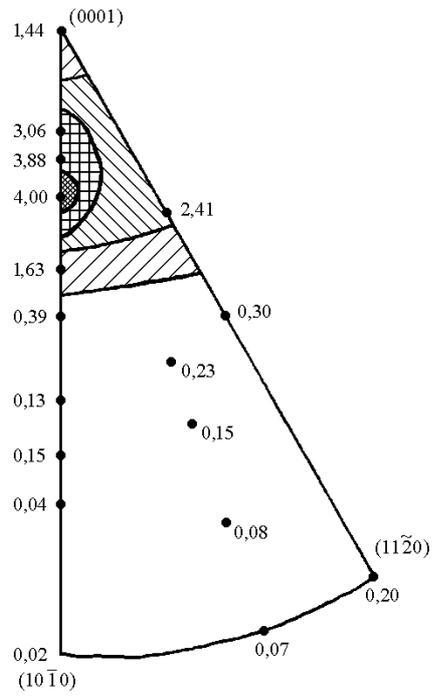
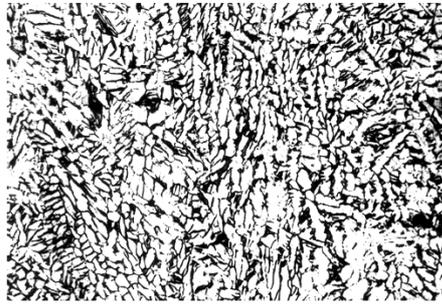
Ниже приведены результаты экспериментальных исследований по влиянию структуры и текстуры на характеристики разрушения полуфабрикатов из титанового сплава ПТ-3Вкт.

При отработке технологического процесса было установлено, что существенное влияние на способность формоизменения листа без трещинообразования оказывает исходное состояние листового полуфабриката. В связи с этим ниже исследована взаимосвязь способности листов сплава ПТ-3Вкт к формоизменению в процессе многопереходной вытяжки, характера изломов, числа гибов в испытаниях на гиб с перегибом, типа кристаллографической текстуры и размера зерна.

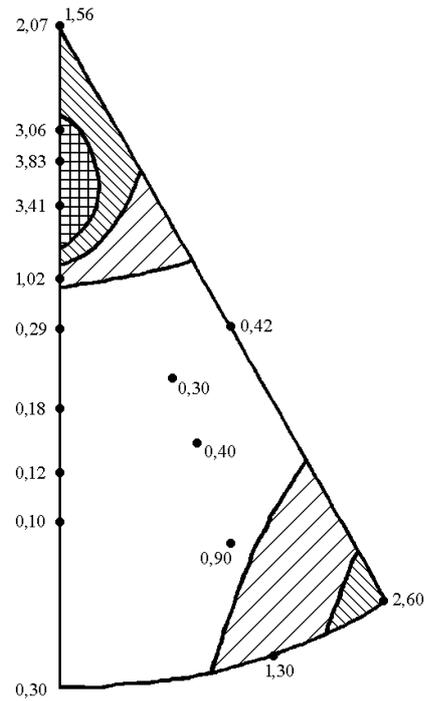
Наиболее высокую штампуемость имеют листы с мелкозернистой структурой и наклонной базисной текстурой с малыми углами наклона кристаллографических плоскостей (0001) к плоскости листа (рисунок 7.9, а). Они обладают высокой пластичностью при циклическом знакопеременном изгибе и характеризуются вязким механизмом разрушения (рисунок 7.10, а). Изломы имеют ямочное строение, при этом размеры и форма ямок весьма разнородны. Кое-где на поверхности излома наблюдаются следы усталостных бороздок.

К резкому снижению пластичности и даже растрескиванию металла на тех или иных переходах ступенчатого набора приводят увеличение среднего размера зерна выше 50...60 мкм и присутствие призматической ориентировки $\{11\bar{2}0\}$ в исходных листах (рисунки 7.9, б, 7.10, б и 7.11). На рисунке 7.11 введены обозначения: точками \circ и \bullet обозначены годные и бракованные полуфабрикаты соответственно.

Причиной отмеченных изменений в структуре и текстуре, по-видимому, является повышение температуры отжига на заключительных стадиях изготовления листов до β -области. Значительное снижение пластичности листов с указанными структурными характеристиками, с одной стороны, связано с тем, что в поверхностных слоях листа при многократных изгибных деформациях возникает интенсивная текстура $\{11\bar{2}0\}$ (рисунок. 7.9).



а



б

Рисунок 7.9 - Микроструктура (x200) и текстура мелко- (а) и крупнозернистых (б) листов титанового сплава ПТ-3Вкт

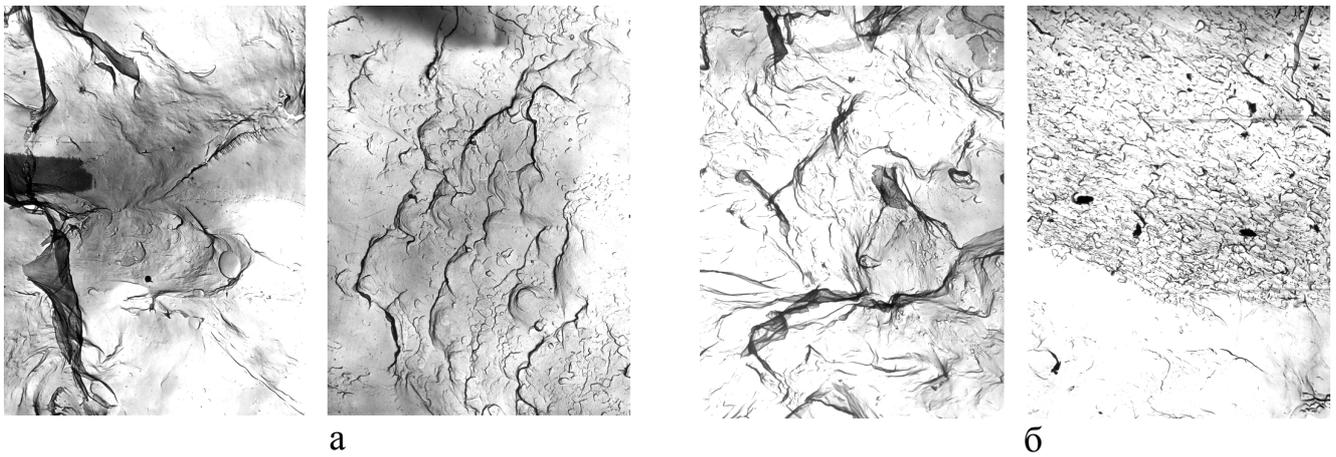


Рисунок 7.10 - Электронномикроскопические (x5000) изображения поверхности изломов пластичных мелкозернистых (а) и охрупченных крупнозернистых (б) листов сплава ПТ-3Вкт

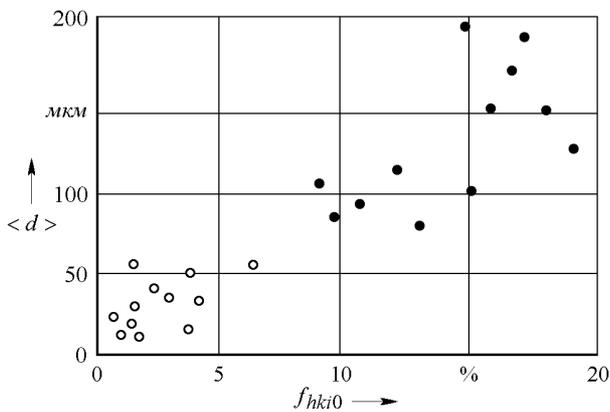


Рисунок 7.11 - Влияние размера зерна и содержания призматических компонент текстуры на поведение листов сплава ПТ-3Вкт при штамповке

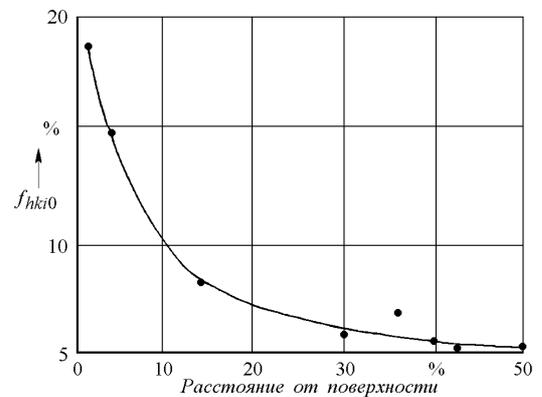


Рисунок 7.12 - Распределение объемной фракции призматических ориентировок по толщине листа сплава ПТ-3Вкт после знакопеременного циклического изгиба до разрушения

В связи с этим наличие преимущественной ориентировки $\{11\bar{2}0\}$ уже в исходном состоянии существенно снижает ресурс пластичности материала [2, 66] (рис. 7.11). Кроме того, анализ напряженно-деформированного состояния и результаты экспериментального изучения текстуры во фланце штамповки показывают, что в процессе вытяжки во фланце, испытывающем плоскую растягивающих напряжений в радиальном направлении формируется текстура $\langle 10\bar{1}0 \rangle$, а в тангенциальном направлении в результате сжимающих напряжений

образуется текстура $\langle 0001 \rangle$ (рисунок 3.69), тем более интенсивная, чем сильнее была ориентировка $\{11\bar{2}0\}$ в плоскости исходного листа.

Однако по мере развития текстуры $\langle 0001 \rangle$ в тангенциальном направлении дальнейшее течение металла во фланце резко затрудняется, поскольку при ориентации сжимающих напряжений вдоль кристаллографической оси $\langle 0001 \rangle$ оказываются заблокированными как основные системы скольжения $\{10\bar{1}0\} \langle 11\bar{2}0 \rangle$, $\{0001\} \langle 11\bar{2}0 \rangle$, $\{10\bar{1}1\} \langle 11\bar{2}0 \rangle$ вследствие нулевых значений фактора Шмида, так и двойниковые по системе $\{10\bar{1}2\} \langle 10\bar{1}1 \rangle$. В результате этого происходит интенсивное гофрообразование с последующим растрескиванием фланца.

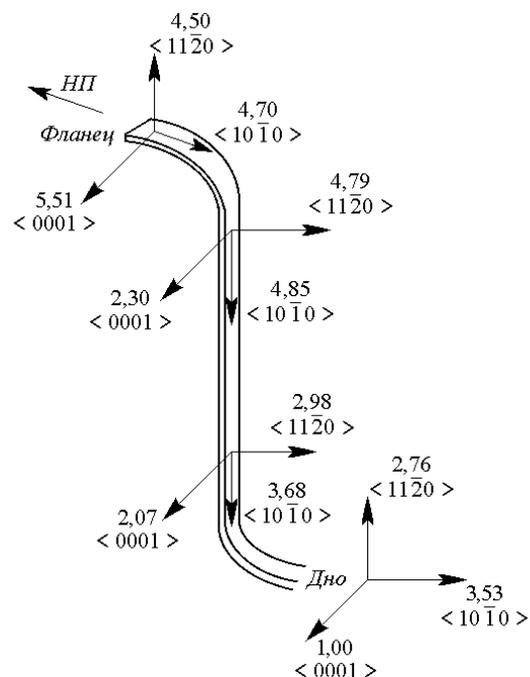


Рисунок 7.13. Характер кристаллографической текстуры в различных зонах штамповки из листа сплава ПТ-3Вкт после первого перехода

Другой причиной резкого снижения пластичности листов с крупнозернистой структурой, сопровождающегося разрушением изделий в процессе многопереходной вытяжки, является смена механизма разрушения. Характерной особенностью изломов в таких листах является наличие участков квазискола и "речного узора", типичных для хрупкого разрушения, а также наличие усталостных бороздок и вторичных трещин (рисунок 7.10, б). Применение методики лаково-угольных реплик позволило обнаружить на поверхности разрушения остатки тонких пленочных выделений (рисунок 7.14).

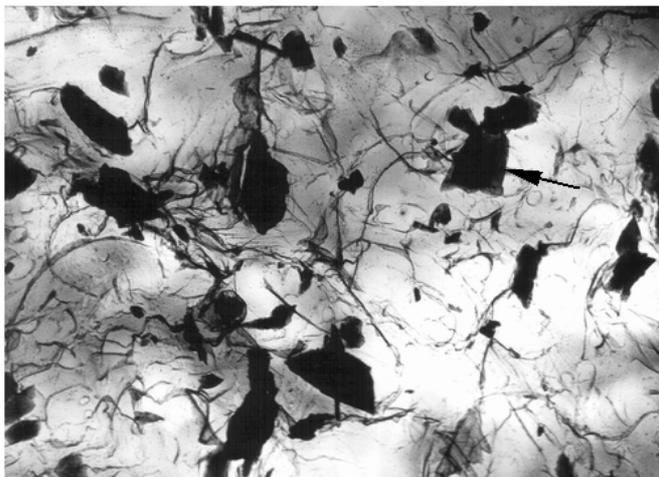


Рисунок 7.14 - Электронномикроскопическое изображение поверхности разрушения (x30000) охрупченного листа сплава ПТ-3Вкт и микродифракционная картина с частицы, указанной стрелкой

При этом они наблюдаются только в листах с крупнозернистой структурой и достаточно выраженной призматической текстурой, характерной для обработки листов β -области, что позволяет считать, что образование этих частиц происходит в результате высокотемпературного нагрева металла. Микродифракционный анализ частиц показал, что они имеют ГЦК-структуру с параметром решетки, близким к $Ti(C, N)$. Однако не исключено, что это могут быть и гидриды титана, имеющие также ГЦК-решетку с параметром, близким к наблюдаемому при проведении экспериментальных исследований.

7.5 Исследование влияния режимов отжига на глубину газонасыщенного слоя полусферических днищ из титанового сплава ПТ-3Вкт

Первый опыт штамповки нового листа ПТ-3Вкт показал, что, несмотря на принципиальную верность выбранной технологической схемы, процесс был нестабилен. Высокий процент брака (до 25 %) из-за образования микротрещин на внешних радиусах 1-го и 2-го переходов, а также на внутренней поверхности полусферы после калибровки требовал проведения исследований для выявления и устранения причин образования разрывов и дальнейшей отработки технологического процесса. Исследования велись в направлении установления

оптимальной температуры отжига, борьбы с газонасыщенным слоем и анализа изменения текстуры в процессе деформирования и при отжигах (истории деформации по участкам).

Отжиг, снимающий нагартовку, в то же время приводит к образованию на поверхности титана так называемого газонасыщенного слоя, имеющего повышенную твердость и хрупкость. Как правило, газонасыщенный слой и мог являться причиной образования микротрещин.

Исследования на образцах для определения глубины газонасыщенного слоя методом замера твердости и исследования микроструктуры после травления показали, что рекристаллизационный отжиг при $T = 800, 850, 900^{\circ}\text{C}$ формирует газонасыщенный слой от 0,2 до 0,5 мм глубиной при отжиге в течение одного часа. Устранить полностью слой такой глубины не представлялось возможным, т.к. это вывело бы за пределы допуска по толщине в нехимфрезеруемой зоне детали.

В то же время отжиг при $T = 650^{\circ}\text{C}$ в течение 5 часов, как показали исследования, формирует газонасыщенный слой на глубину не более 10 мкм (0,1 мм), что вполне приемлемо при 4, 5 межоперационных отжигах по одному часу, которые проходит ступенчатый полуфабрикат до калибровки.

Параллельно исследовалось влияние отжигов на текстуру листа. Отжиги образцов исследованного сплава проводились в вакуумной трубчатой печи при температуре 650°C ; при этой температуре достаточно активно развиваются рекристаллизационные процессы.

Экспериментально установлено, что при увеличении длительности отжига при температуре 650°C в листах сплава ПТ-3Вкт наблюдаются изменения текстуры, способствующие усилению благоприятных для штампуемости ориентировок. Проведенные исследования позволили сделать выбор температуры межоперационных отжигов, равную 650°C в течение часа. Эта температура при неоднократных отжигах формирует благоприятную для штампуемости текстуру и создает незначительный по глубине газонасыщенный слой повышенной твердости и хрупкости, который снимается операцией травления без риска выйти за минусовой допуск по толщине в нехимфрезерованной зоне детали. Как показали замеры

твердости, на образцах, вырезанных из исходных листов, металл в состоянии поставки, несмотря на шлифовку поверхности, также имеют газонасыщенный слой. Поэтому, помимо травления заготовки перед обтяжкой по пуансону, введена дополнительная операция травления листов в исходном состоянии. Необходимо отметить, что решение о глубине травления заготовки или ступенчатого полуфабриката перед обтяжкой принимается индивидуально по каждой заготовке на основании данных измерения толщины ультразвуковым толщиномером «Калипер-204» по схеме введенной в технологический паспорт детали и глубины газонасыщенного слоя на образцах-свидетелях и, как правило, не превышает 0,1 мм за один раз.

8. Использование результатов научно-исследовательской работы в учебном процессе

Результаты научно-исследовательской работы использованы при модернизации учебных планов подготовки бакалавров техники и технологии направления 150400 «Технологические машины и оборудование» и студентов, обучающихся по направлению 150200 «Машиностроительные технологии и оборудование» специальности 150201 «Машины и технология обработки металлов давлением», при выполнении курсовых работ и дипломных проектов, а также учебных планов подготовки магистров по направлениям подготовки 150400 "Технологические машины и оборудование" программ подготовки: 15040039 "Теория и технология штамповки анизотропных материалов", 15040041 «Высокоэффективные технологические процессы листовой и объемной штамповки», 15040040 «Высокоскоростные методы обработки металлов давлением».

Отдельные результаты исследований использованы в учебном процессе в курсах «Новые технологические процессы и оборудование» и «Механика процессов пластического формоизменения», «Теория обработки металлов давлением», «Производство технологического оборудования», «Горячая штамповка», «Новые виды горячей и холодной объемной штамповки», «Нагрев и нагревательные устройства» для бакалавров техники и технологии направления 150400 «Технологические машины и оборудование» и студентов, обучающихся по направлению 150200 «Машиностроительные технологии и оборудование» специальности 150201 «Машины и технология обработки металлов давлением», при выполнении курсовых работ и дипломных проектов.

Разработаны новые методические указания по проведению практических занятий по курсу «Теория обработки металлов давлением» (8 занятий) (приложение 1).

По результатам научных исследований опубликованы два учебных пособия:

1. Яковлев С.С., Трегубов В.И., Платонов В.И., Недошивин С.В. Устойчивость стержневых конструкций: учеб. пособие / под ред. С.С. Яковлева. Тула: Изд-во ТулГУ. 2011. 280 с.

2. Яковлев С.С., Ларин С.Н., Трегубов В.И., Ремнев К.С. Устойчивость пластинок: учеб. пособие / под ред. С.С. Яковлева. Тула: Изд-во ТулГУ, 2011. 200 с.

При выполнении научно-исследовательской работы привлекались студенты в качестве непосредственных исполнителей НИР. Студентами, привлекаемыми к выполнению НИР, получено 5 Диплом лауреатов Всероссийских научно-технических конференций.

**9. Сведения о выполнении целевых индикаторов и показателей
федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры
инновационной России» на 2009-2013 годы»**

9.1. Список монографий, опубликованных в 2011 г.

1. Яковлев С.С., Трегубов В.И. Теория и технология изготовления крупногабаритных осесимметричных деталей ответственного назначения из высокопрочных анизотропных материалов / под ред. С.С. Яковлева. Тула: Изд-во ТулГУ, 2011. 232 с.

2. Яковлев С.С., Ларин С.Н., Трегубов В.И. Изотермическая пневмоформовка элементов ячеистых многослойных листовых конструкций из анизотропных высокопрочных материалов в режиме ползучести / под ред. С.С. Яковлева. Тула: Изд-во ТулГУ, 2011. 173 с.

9.2. Список учебных пособий, опубликованных в 2011 г.

1. Устойчивость стержневых конструкций: учеб. пособие / С.С. Яковлев [и др.]; под ред. С.С. Яковлева. Тула: Изд-во ТулГУ. 2011. 280 с.

2. Устойчивость пластинок: учеб. пособие / С.С. Яковлев [и др.]; под ред. С.С. Яковлева. Тула: Изд-во ТулГУ, 2011. 200 с.

9.3. Список учебно-методических статей, опубликованных в 2011 г.

1. Научно-исследовательская работа студентов политехнического института в 2010 году: итоги и перспективы / С.Н. Ларин [и др.] // Молодежный вестник политехнического института. Тула: ТулГУ, 2011. С. 3-5.

2. Ларин С.Н., Аверьянова И.Э., Воротынцев А.Ю. О мерах по обеспечению учебной дисциплины на механико-технологическом факультете // Молодежный вестник политехнического института. Тула: ТулГУ, 2011. С. 12-14.

3. Ларин С.Н., Аверьянова И.Э., Судаков С.П. Модернизация механико-технологического факультета // Молодежный вестник политехнического института. Тула: ТулГУ, 2011. С. 15-16.

4. Ларин С.Н., Яковлев С.С. Научно-исследовательская работа студентов на кафедре МПФ // Молодежный вестник политехнического института. Тула: ТулГУ, 2011. С. 16-18.

5. Ларина М.В., Ларин С.Н. Охрана труда и окружающей среды в дипломном проектировании для специальности 150201 «Машины и технология обработки металлов давлением» // Молодежный вестник политехнического института. Тула: ТулГУ, 2011. С. 19-20.

6. Тишин С.А., Ларин С.Н., Акимова М.В. Процесс адаптации студентов первого курса механико-технологического факультета // Молодежный вестник политехнического института. Тула: ТулГУ, 2011. С. 30-31.

9.4. Список статей, опубликованных в ведущих научных журналах в 2011 г.

1. Яковлев С.С., Платонов В.И. Математическая модель операции реверсивной вытяжки осесимметричных деталей с фланцем из кристаллических анизотропных материалов // Известия ТулГУ. Сер. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2011. Вып. 1. С. 89-94.

2. Грязев М.В., Яковлев С.С., Ларин С.Н. Математическая модель изотермического деформирования полусферических деталей из трансверсально-изотропных материалов в режиме ползучести // Известия ТулГУ. Сер. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2011. Вып. 1. С. 27-36.

3. Яковлев С.С., Крылов Д.В. Математическая модель операции раздачи трубных заготовок из анизотропных материалов // Известия ТулГУ. Сер. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2011. Вып. 1. С. 79-88.

4. Яковлев С.С. Кухарь В.Д. Анизотропия механических свойств и кристаллографическая текстура гексагональных плотноупакованных металлов //

Известия ТулГУ. Сер. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2011. Вып. 1. С. 43-49.

5. Пасынков А.А., Яковлев С.С., Черняев А.В. Теоретические исследования операции высадки с нагревом фланцевых утолщений на арматуре трубопроводов // Известия ТулГУ. Сер. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2011. Вып. 1. С. 95-105.

6. Яковлев С.С., Кухарь В.Д. Текстура и структура сварных соединений гексагональных плотноупакованных титановых сплавов // Известия ТулГУ. Сер. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2011. Вып. 1. С. 37-42.

7. Трегубов В.И., Дудка Д.В., Яковлев С.С. Одномашинная технология изготовления полых осесимметричных сложнопрофильных деталей методом ротационной вытяжки и ротационного обжима // Известия ТулГУ. Сер. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2011. Вып. 1. С. 21-26.

8. Чудин В.Н., Перепелкин А.А., Черняев А.В. Формообразование ребер жесткости на плитах в режиме кратковременной ползучести // Известия ТулГУ. Сер. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2011. Вып. 1. С. 63-70.

9. Яковлев С.С., Ремнев К.С. Оценка влияния анизотропии механических свойств трубных заготовок на технологические параметры раздачи // Известия ТулГУ. Сер. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2011. Вып. 2. С. 502-513.

10. Яковлев С.С., Кухарь В.Д., Ремнев К.С. Математическая модель многооперационной вытяжки ступенчатых осесимметричных деталей из анизотропных материалов // Известия ТулГУ. Сер. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2011. Вып. 2. С. 409-416.

11. Ремнев К.С., Яковлев С.С. Технологические параметры операций обжима и раздачи трубных заготовок из анизотропных материалов // Известия ТулГУ. Сер. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2011. Вып. 2. С. 513-526.

12. Яковлев С.С., Платонов В.И. Силовые режимы операции реверсивной вытяжки осесимметричных деталей с фланцем из кристаллических анизотропных материалов // Известия ТулГУ. Сер. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2011. Вып. 2. С. 537-541.

13. Ларин С.Н., Яковлев С.С., Грязев М.В. Оценка влияния анизотропии механических свойств заготовки на предельные возможности изотермического деформирования полусферических деталей в режиме ползучести // Известия ТулГУ. Сер. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2011. Вып. 2. С. 394-398.

14. Яковлев С.С., Дудка Д.В., Суков М.В. Предельные возможности операции обратного выдавливания трубных заготовок из анизотропных материалов // Известия ТулГУ. Сер. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2011. Вып. 2. С. 471-478.

15. Ларин С.Н., Бессмертный А.В., Кухарь В.Д. Экспериментально-технологические работы по изотермическому деформированию стрингерных трехслойных листовых конструкций // Известия ТулГУ. Сер. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2011. Вып. 2. С. 428-434.

16. Коротков В.А., Полковников Д.Б., Терехов А.Ф. Метод диагностики привода кузнечно-штамповочного оборудования в процессе его эксплуатации пресса // Известия ТулГУ. Сер. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2011. Вып. 3. С. 449-455.

17. Яковлев С.С., Дудка Д.В. Оценка влияния длительности отжига на текстуру листов из титанового сплава ПТ-3вкт // Известия ТулГУ. Сер. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2011. Вып. 3. С. 400-403.

18. Яковлев С.С., Ремнев К.С. Многооперационная вытяжка полусферических тонкостенных днищ // Известия ТулГУ. Сер. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2011. Вып. 3. С. 420-427.

19. Яковлев С.С., Платонов В.И., Нечепуренко Ю.Г. Предельные возможности операции реверсивной вытяжки осесимметричных деталей с фланцем из кристаллических анизотропных материалов // Известия ТулГУ. Сер. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2011. Вып. 3. С. 463-469.

20. Ларин С.Н. Технологические параметры процесса формообразования куполообразных изделий из анизотропного материала в режиме ползучести // Известия ТулГУ. Сер. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2011. Вып. 3. С. 469-476.

21. Яковлев С.С., Коротков В.А. Изготовление полусферических днищ из малопластичных материалов // Известия ТулГУ. Сер. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2011. Вып. 3. С. 427-432.

22. Яковлев С.С., Кухарь В.Д. Длительность отжига и текстура листов из сплава ПТ-3ВКТ // Известия ТулГУ. Сер. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2011. Вып. 4. С. 23-26.

23. Яковлев С.С., Кухарь В.Д., Платонов В.И. Разностенность осесимметричных деталей с фланцем при реверсивной вытяжке кристаллических анизотропных материалов // Известия ТулГУ. Сер. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2011. Вып. 4. С. 26-30.

24. Яковлев С.С., Кухарь В.Д. Разрушение полуфабриката при многооперационной вытяжке со структурой и текстурой титанового сплава // Известия ТулГУ. Сер. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2011. Вып. 4. С. 18-23.

25. Яковлев С.С., Ремнев К.С., Калашников А.Е. Влияние анизотропии механических свойств на образование складок при вытяжке осесимметричных деталей // Известия ТулГУ. Сер. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2011. Вып. 4. С. 98-109.

26. Ларин С.Н. Изотермическое формоизменение куполообразных оболочек // Известия ТулГУ. Сер. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2011. Вып. 4. С. 77-82.

27. Яковлев С.С., Ремнев К.С., Фам Дык Тхиен. Вопросы теории штамповки ортотропных анизотропно-упрочняющихся материалов // Известия ТулГУ. Сер. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2011. Вып. 4. С. 130-135.

28. Яковлев С.С., Ремнев К.С. Математическая модель анизотропного упрочнения ортотропного материала, разносопротивляющегося растяжению и сжатию // Известия ТулГУ. Сер. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2011. Вып. 4. С. 91-98.

29. Яковлев С.С., Ремнев К.С., Калашников А.Е. Энергетический критерий устойчивости анизотропной тонколистовой прямоугольной пластины // Известия ТулГУ. Сер. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2011. Вып. 4. С. 114-123.

30. Яковлев С.С., Ремнев К.С. Критерий локальной потери устойчивости ортотропного анизотропно-упрочняющегося листа // Известия ТулГУ. Сер. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2011. Вып. 4. С. 109-113.

31. Чудин В.Н., Ларин С.Н., Бессмертная Ю.В. Вытяжка цилиндрических деталей из анизотропных материалов по схеме «круг-цилиндр» // Известия ТулГУ. Сер. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2011. Вып. 4. С. 124-130.

32. Яковлев С.С., Ремнев К.С. Основные уравнения и соотношения пластического течения начально-ортотропного упрочняющегося, разносопротивляющегося материала // Известия ТулГУ. Сер. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2011. Вып. 5. С. (принята в печать).

33. Яковлев С.С., Кухарь В.Д., Платонов В.И. Оценка величины повреждаемости осесимметричных деталей с фланцем из анизотропного материала при реверсивной вытяжке // Известия ТулГУ. Сер. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2011. Вып. 5. С. (принята в печать).

34. Яковлев С.С., Ремнев К.С. Критерий шейкообразования ортотропного анизотропного упрочняющегося листового материала // Известия ТулГУ. Сер. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2011. Вып. 5. С. (принята в печать).

35. Кухарь В.Д., Киреева А.Е. Пути повышения эффективности функционирования магнитно-импульсных установок модульного типа // Известия ТулГУ. Сер. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2011. Вып. 5. С. (принята в печать).

36. Кухарь В.Д., Киреева А.Е. Интенсификация процессов магнитно-импульсной штамповки путем управления формой разрядного импульса // Известия ТулГУ. Сер. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2011. Вып. 5. С. (принята в печать).

37. Кухарь В.Д., Киреева А.Е. Математическое моделирование электромеханических процессов протекающих в индукторе для магнитно-

импульсной штамповки // Известия ТулГУ. Сер. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2011. Вып. 5. С. (принята в печать).

38. Яковлев С.С., Ларин С.Н., Чудин В.Н. Технологические процессы изотермического формообразования полусферических деталей // Кузнечно-штамповочное производство, 2011, №11. С. (принята в печать).

39. Кухарь В.Д., Яковлев С.С., Ремнев К.С. Влияние технологических параметров на образование складок при вытяжке осесимметричных деталей из анизотропного материала // Кузнечно-штамповочное производство, 2011, №11. С. (принята в печать).

40. Яковлев С.С., Ларин С.Н., Чудин В.Н. Технологические рекомендации по проектированию технологических процессов изготовления корпусных узлов из высокопрочных материалов // Кузнечно-штамповочное производство, 2011, №11, С. (принята в печать).

41. Грязев М.В., Пасько А.Н., Алексеев Д.А. Программа для расчета трехмерных процессов холодной штамповки // Кузнечно-штамповочное производство, 2011, №11. С. (принята в печать).

42. Пасько А.Н., Алексеев Д.А. Математическое моделирование процессов гидравлической и гидромеханической формовки // Кузнечно-штамповочное производство, 2011, №11. С. (принята в печать).

43. Панфилов Г.В., Недошивин С.В., Хвостов Е.Ю. Особенности многооперационной холодной штамповки остроконечных стержневых соединительных элементов // Кузнечно-штамповочное производство, 2011, №11. С. (принята в печать).

44. Технологические параметры вытяжки с утонением стенки двухслойных анизотропных материалов / С.С. Яковлев [и др.] // Кузнечно-штамповочное производство, 2011, №11. С. (принята в печать).

45. Ротационная вытяжка с утонением стенки трубных заготовок из анизотропного материала / С.С. Яковлев [и др.] // Кузнечно-штамповочное производство, 2011, №11. С. (принята в печать).

46. Ларин С.Н. Изотермическая пневмоформовка полусферических деталей из анизотропного материала в режиме кратковременной ползучести // Известия вузов. Машиностроение. 2011, № 10. С. (принята в печать).

47. Ларин С.Н. Изотермическое деформирование элементов листовых конструкций цилиндрического и прямоугольного сечения в режиме кратковременной ползучести // Известия вузов. Машиностроение. 2011, №11. С. (принята в печать).

48. Трегубов В.И., Яковлев С.С., Ремнев К.С. Технологические параметры вытяжки с утонением стенки цилиндрических деталей из двухслойных анизотропных материалов // Боеприпасы и высокоэнергетические конденсированные системы. Москва. Научный совет РАН. 2011. С. (принята в печать).

49. Трегубов В.И., Яковлев С.С. Ротационная вытяжка с утонением стенки трубных заготовок из анизотропного материала // Боеприпасы и высокоэнергетические конденсированные системы. Москва. Научный совет РАН. 2011. С. (принята в печать).

9.5. Список статей, опубликованных в межвузовских сборниках научных трудов в 2011 г.

1. Дудка Д.В. Влияние анизотропии механических свойств на устойчивость стенки трубной заготовки // Известия ТулГУ. Сер. Актуальные вопросы механики. Тула: Изд-во ТулГУ. 2011. Вып. 1. С. 162-165.

2. Дудка Д.В., Яковлев С.С., Трегубов В.И. Формирование показателей качества осесимметричных деталей из сплава АМг6 при ротационной вытяжке // Известия ТулГУ. Сер. Актуальные вопросы механики. Тула: Изд-во ТулГУ. 2011. Вып. 1. С. 165-171.

3. Яковлев С.С., Ремнев К.С., Крылов Д.В. Технологические параметры операции обжима анизотропных трубных заготовок // Известия ТулГУ. Сер. Актуальные вопросы механики. Тула: Изд-во ТулГУ. 2011. Вып. 1. С. 171-179.

4. Калашников А.Е. Влияние технологических параметров на образование складок при вытяжке осесимметричных деталей из анизотропного материала // Известия ТулГУ. Сер. Актуальные вопросы механики. Тула: Изд-во ТулГУ, 2011. Вып. 1. С. 197-206.
5. Герасимов Д.В. Исследование образования наплыва при ротационной вытяжке осесимметричных деталей // Молодежный вестник политехнического института. Тула: ТулГУ, 2011. С. 78-80.
6. Герасимов Д.В. Технологические режимы ротационной вытяжки конических деталей из анизотропных материалов // Молодежный вестник политехнического института. Тула: ТулГУ, 2011. С. 81-83.
7. Исаева А.Н. Теоретические исследования осесимметричной вытяжки с утонением стенки толстостенных заготовок из анизотропных материалов // Молодежный вестник политехнического института. Тула: ТулГУ, 2011. С. 120-121.
8. Лазо А.А. Теоретические исследования реверсивной вытяжки осесимметричных деталей с фланцем из кристаллических анизотропных материалов // Молодежный вестник политехнического института. Тула: ТулГУ, 2011. С. 144-146.
9. Лыков С.С. Теоретические исследования операции раздачи трубных заготовок из анизотропных материалов // Молодежный вестник политехнического института. Тула: ТулГУ, 2011. С. 164-166.
10. Перепелкин А.А. Теоретические исследования формообразования ребер жесткости на плитах в режиме кратковременной ползучести // Молодежный вестник политехнического института. Тула: ТулГУ, 2011. С. 217-219.
11. Рябкин Д.А. Математическая модель операции обратного выдавливания трубных заготовок из анизотропного материала // Молодежный вестник политехнического института. Тула: ТулГУ, 2011. С. 242-244.
12. Фан Дык Тхиен Потеря устойчивости стенки трубной заготовки из анизотропного материала // Молодежный вестник политехнического института. Тула: ТулГУ, 2011. С. 286-288.

9.6. Список тезисов докладов, опубликованных в 2011 г.

1. Леонова Е.В. Исследование процесса изотермического деформирования анизотропной листовой заготовки в матрице прямоугольного поперечного сечения в режиме кратковременной ползучести // VI магистерская научно-техническая конференция. Тула: ТулГУ, 2011. С. 130-131.

2. Наумова И.А. Исследование процесса изотермической пневмоштамповки элементов конструкций цилиндрического и трапециевидного сечения из анизотропных заготовок в режиме кратковременной ползучести // VI магистерская научно-техническая конференция. Тула: ТулГУ, 2011. С. 139-140.

3. Исаева А.Н. Исследование операции осесимметричной вытяжки с утонением стенки цилиндрических заготовок из анизотропных материалов // VI магистерская научно-техническая конференция. Тула: ТулГУ, 2011. С. 120-121.

9.7. Список, поданных заявок на изобретение в 2011 г.

1. Заявка на изобретение № 2009128344/02 от 21.07.2009. Многослойная ячеистая конструкция и способ ее изготовления. Авторы: Коротков В.А., Яковлев С.С., Чудин В.Н., Яковлев С.П., Ларин С.Н., Соболев Я.А (получено положительное решение).

9.8. Список защит докторских диссертаций в 2011 г.

1. Черняев Алексей Владимирович «Теория и технология изотермического деформирования осесимметричных деталей жестким инструментом в режиме кратковременной ползучести» по специальности 05.02.09 Технологии и машины обработки давлением.

9.9. Список защит кандидатских диссертаций в 2011 г.

Количество защит кандидатских диссертаций – 4.

Количество защит магистерских диссертаций – 8.

1. Легейда Виталий Юрьевич «Формовка тонкостенных осесимметричных оболочек равномерным давлением деформирующей среды» по специальности 05.02.09 Технологии и машины обработки давлением.

2. Панов Андрей Александрович «Холодное пластическое формообразование сферических шайб на соискание ученой степени кандидат технических наук по специальности» по специальности 05.02.09 Технологии и машины обработки давлением.

3. Пасынков Андрей Александрович «Изотермическая штамповка осесимметричных заготовок из высокопрочных материалов в режиме кратковременной ползучести» по специальности 05.02.09 Технологии и машины обработки давлением (защита состоится в 8 ноября 2011 года).

4. Брагин Сергей Александрович «Изотермическое прямое и ортогональное выдавливание элементов трубопроводов из высокопрочных материалов в режиме кратковременной ползучести» по специальности 05.02.09 Технологии и машины обработки давлением (защита состоится в 4 квартале 2011 года).

5. Подготовлено 8 магистров по направлению «Технологические машины и оборудование», программам подготовки «Теория и технология штамповки анизотропных заготовок», «Высокоскоростные методы обработки металлов давлением» и «Высокоэффективные технологические процессы листовой и объемной штамповки».

9.10. Признание заслуг коллектива

1. Присвоена премия Правительства Российской Федерации в области образования в 2011 году за научно-методическую работу «Научно-учебно-

педагогический комплекс по подготовке кадров высшей квалификации в области инновационных и высоких технологий обработки металлов давлением» (д.т.н., проф. Яковлев С.С., д.т.н., проф. Кухарь В.Д.).

2. Диплом выставки научно-технического творчества молодежи, посвященный Дню Российской науки.

3. Диплом Союза научных и инженерных общественных организаций тульской области за активное участие в научно-исследовательской работе (студ. Исаева А.Н.).

4. Диплом Союза научных и инженерных общественных организаций тульской области за активное участие в научно-исследовательской работе (студ. Леонова Е.В.).

5. Диплом первой степени VI магистерской научно-технической конференции (студ. Исаева А.Н.).

6. Подана заявка на региональный конкурс «инженер года - 2011» в версии «Профессиональные инженеры» в номинации «Машиностроение».

7. Объявлена благодарность за активное участие в конкурсе «Лучший молодой преподаватель ТулГУ» (к.т.н., доц. Платонов В.И.).

8. Подана заявка на региональный конкурс «Лучший молодой ученый ТулГУ - 2011» (ассист. Пасынков А.А.).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Цель выполнения работы - научное обоснование и внедрение высоких технологий изготовления корпусных деталей сложной формы (полусферических и полуторовых днищ) ответственного назначения из высокопрочных кристаллических материалов методами пластического формообразования путем повышения пластической деформируемости листовых кристаллических материалов на базе изменения кристаллографической текстуры и характеристик анизотропии механических свойств, путем совершенствования технологий формообразования и термообработки при изготовлении. Подготовка научных кадров для машиностроительных предприятий и научно-исследовательских учреждений центрального региона и научно-педагогических кадров для высших учебных заведений, формирование эффективных и жизнеспособных научных коллективов.

В процессе теоретического и экспериментального исследований получены следующие **основные результаты и сделаны выводы:**

1. Созданы математические модели первой и многоступенчатой вытяжек осесимметричных деталей из высокопрочных трансверсально-изотропных материалов, применительно к изготовлению полусферических деталей из таких материалов.

2. Выполнены теоретические и экспериментальные исследования первой и многоступенчатой вытяжек осесимметричных деталей из трансверсально-изотропных материалов. Разработаны алгоритм расчета исследуемых процессов глубокой вытяжки и программное обеспечение для ЭВМ. Установлено влияние технологических параметров и геометрии рабочего инструмента глубокой вытяжки на силовые режимы, предельные возможности пластического формоизменения и формирование показателей качества механических свойств материала цилиндрических деталей (степени использования ресурса пластичности).

3. Показано, что относительная величина силы процесса \bar{P} с уменьшением коэффициента вытяжки m_{di} , радиусов закругления прижима и матрицы $\bar{R}_{np} = \bar{R}_M$,

ростом коэффициента трения на контактных границах рабочего инструмента и заготовки μ_M и величины давления прижима q возрастает. Минимальная величина силы процесса соответствует моменту совпадения центра закругления пуансона с верхней кромкой матрицы; максимальная величина силы соответствует определенной величине перемещения пуансона и связана с перетяжкой части высоты предыдущей заготовки через кромку закругления прижима, а также вовлечения в процесс пластического деформирования большей части материала, находящегося в недеформированной части заготовки (стенке).

4. Предельные возможности формоизменения на первой и многоступенчатой вытяжках осесимметричных деталей на радиальных матрицах рассчитывались по максимальной величине растягивающего напряжения на выходе из очага пластической деформации и по степени использования ресурса пластичности.

Они зависят от анизотропии механических свойств материала заготовки, технологических параметров, геометрии матрицы, условий трения на контактных поверхностях инструмента, а также технических условий эксплуатации получаемых изделий и могут ограничиваться степенью использования ресурса пластичности или максимальной величиной растягивающего напряжения на выходе из очага пластической деформации. Так, предельные возможности деформирования на последующих операциях вытяжки алюминиевого сплава А5М ограничиваются допустимой величиной накопленных микрповреждений, а титанового сплава ПТ-3Вкт ограничиваются величиной осевого напряжения на выходе из очага пластической деформации.

Установлено, что с увеличением относительных радиусов закругления прижима и матрицы $\bar{R}_M = \bar{R}_{np}$ предельный коэффициент вытяжки m_{dinp} уменьшается. Показано, что относительная величина давления прижима оказывает влияние на предельные возможности деформирования. Увеличение \bar{q} от 0,005 до 0,095 приводит к росту m_{dinp} на 30...40 % для алюминиевого сплава А5М. Изменения условий трения на контактной поверхности матрицы оказывают влияние на предельный коэффициент вытяжки m_{dinp} . Рост коэффициента трения μ_M

сопровождается увеличением предельного значения коэффициента вытяжки m_{d1np} на 42 % при прочих равных условиях деформирования.

С увеличением высоты цилиндрической части изготавливаемой детали H степень использования ресурса пластичности χ существенно возрастает. Учет неоднородности механических исходного полуфабриката существенно уточняет величины предельных коэффициентов вытяжки m_{d1np} .

5. Оценено влияние анизотропии механических свойств материала заготовки на силовые режимы и предельные возможности формоизменения рассматриваемых процессов глубокой вытяжки. С увеличением коэффициента нормальной анизотропии силовые режимы первой и последующих операций вытяжки уменьшаются. Влияние коэффициента анизотропии R усиливаются с уменьшением коэффициента вытяжки m_{di} . Показано, что увеличение нормального коэффициента анизотропии R с 0,2 до 2 приводит к уменьшению величины предельного коэффициента первой операции вытяжки m_{d1np} в 1,25 раза, а на последующих операциях – к снижению величины предельного коэффициента вытяжки m_{dini} на 30 %.

6. Сравнение результатов теоретических расчетов и экспериментальных данных по силовым режимам операций вытяжки указывает на их удовлетворительное согласование (до 15 %).

7. Разработана математическая модель операции реверсивной вытяжки осесимметричных деталей с фланцем из анизотропных материалов на радиальных матрицах. Выполнены теоретические исследования операции реверсивной вытяжки осесимметричных деталей с фланцем из анизотропных материалов. Разработана алгоритм расчета исследуемого процесса вытяжки и программное обеспечение для ЭВМ. Установлено влияние анизотропии механических свойств материала заготовки, технологических параметров и геометрии рабочего инструмента реверсивной вытяжки на силовые режимы, предельные возможности пластического формоизменения, относительную величину разностенности изготавливаемой детали

и формирование показателей качества механических свойств материала осесимметричных деталей (степени использования ресурса пластичности).

8. В результате теоретических исследований установлено, что графические зависимости изменения относительной величины силы \bar{P} процесса реверсивной вытяжки осесимметричных деталей с фланцем от относительной величины перемещения пуансона \bar{h}_{II} носят сложный характер. Показано, что с уменьшением коэффициента вытяжки m_d и увеличением коэффициента трения на контактных границах рабочего инструмента и заготовки μ величина \bar{P} возрастает. Так, уменьшение коэффициента вытяжки с 0,8 до 0,6 сопровождается ростом \bar{P} в 2 раза. Рост коэффициента трения на контактных границах рабочего инструмента и заготовки μ с 0,1 до 0,3 сопровождается увеличением максимальной величины накопленных микрповреждений ω_e в 1,75 раза.

9. Оценена величина накопленных микрповреждений в цилиндрической части изготавливаемой осесимметричной детали. Показано, что с уменьшением коэффициента вытяжки m_d и увеличением коэффициента трения на контактных границах рабочего инструмента и заготовки μ максимальная величина накопленных микрповреждений ω_e возрастает. Так, уменьшение коэффициента вытяжки с 0,8 до 0,6 сопровождается ростом ω_e в 3 раза. Рост коэффициента трения на контактных границах рабочего инструмента и заготовки μ с 0,1 до 0,3 сопровождается увеличением максимальной величины накопленных микрповреждений ω_e в 2 раза, что связано с повышением меридиональных напряжений σ_r .

10. Количественно определены предельные возможности процесса реверсивной вытяжки осесимметричных деталей по максимальной величине осевого напряжения в стенке изделия на выходе из очага деформации, допустимой степени использования ресурса пластичности и критерию локальной потери устойчивости анизотропной заготовки. Показано, что предельные возможности формоизменения операции реверсивной вытяжки осесимметричных деталей с фланцем ограничиваются как максимальной величиной осевого напряжения на выходе из

очага пластической деформации, так и критерием локальной потери устойчивости заготовки. Это зависит от механических свойств исходного материала, технологических параметров, геометрии рабочего инструмента, коэффициента трения на контактных границах рабочего инструмента и заготовки μ и величины давления прижима q . Установлено, что с уменьшением коэффициента трения на контактных границах рабочего инструмента и заготовки μ и относительной величины давления прижима \bar{q} предельный коэффициент вытяжки m_{dnp} снижается.

11. Оценено влияние анизотропии механических свойств материала заготовки на силовые режимы, относительную величину разностенности изготавливаемой детали и предельные возможности реверсивной вытяжки трансверсально-изотропных материалов. Показано, что с увеличением коэффициента нормальной анизотропии R относительная величина силы \bar{P} уменьшается. Влияние коэффициента анизотропии R на силовые режимы процесса усиливается с уменьшением коэффициента вытяжки m_d и коэффициента трения μ .

В результате теоретических исследований установлено, что величина предельного коэффициента вытяжки m_{dnp} снижается с ростом коэффициента анизотропии R и уменьшением коэффициента трения на контактных границах рабочего инструмента и заготовки μ . Установлено, что увеличение коэффициента нормальной анизотропии R от 0,2 до 2 приводит к уменьшению величины предельного коэффициента утонения m_{dnp} , определенного по степени использования ресурса пластичности, на 45 %, а для m_{dnp} , вычисленного по максимальной величине осевого напряжения на выходе из очага пластической деформации, на 15 %. С уменьшением относительного радиуса рассматриваемого сечения \bar{r} и коэффициента анизотропии R от 1,5 до 0,5 наблюдается существенное увеличение относительной разностенности \bar{s} детали.

12. Выполнены экспериментальные операции вытяжки и реверсивной вытяжки полоторовых днищ из алюминиевого сплава АМг6. Сравнение результатов

теоретических расчетов и экспериментальных данных по силовым режимам реверсивной вытяжки осесимметричных деталей из алюминиевого сплава АМгб указывает на их удовлетворительное согласование (до 12 %).

13. Установлено, что способность листовых материалов к глубокой вытяжке может быть оценена по средним значениям косинуса угла между гексагональной осью и направлением нормали к плоскости листа. Полученное выражение $R(\varphi)$ позволяет учесть влияние текстуры на величину коэффициента нормальной пластической анизотропии. При этом введенные текстурные параметры Δ_i ($i=1...5$) достаточно полно описывают пространственное распределение зерен в поликристалле. Среднее значение коэффициента нормальной пластической анизотропии можно получить по данным о текстуре из одной ОПФ, снятой с направления нормали к плоскости листа.

14. При увеличении длительности отжига при температуре 650 °С в листах сплава ПТ-3Вкт наблюдаются изменения текстуры, способствующие усилению благоприятных для штампуемости ориентировок. Многократные отжиги донной части штамповок не будут приводить к снижению качества изделия. Неоднократный межоперационный отжиг при температуре 650 °С по 1 часу формирует в листе титанового сплава ПТ-3Вкт текстуру, благоприятную для штампуемости, и создает суммарную толщину газонасыщенного слоя не более 0,1 мм, что позволяет принять эту температуру как оптимальную.

15. При штамповке полусфер из титанового сплава ПТ-3Вкт методом ступенчатого набора с последующей калибровкой взрывом наиболее оптимальным является лист с исходной текстурой, имеющей небольшой наклон базисных плоскостей (наклонная компонента), описываемый как $(0001)\pm 20^\circ$ НН – ПН [1010], а также минимальную неоднородность текстуры. Для уменьшения вероятности образования микротрещин, выводящих деталь за предел допуска по толщине, следует так строить технологический процесс ступенчатого набора титановых листов, чтобы число зон, имеющих максимальное (8...10) число знакопеременных деформаций (перегибов), было минимальным. Реориентация текстурных максимумов базисных плоскостей в процессе ступенчатого набора с увеличением угла их наклона до 60° и усиление

призматической компоненты приводят к текстурному упрочнению титанового листа.

16. Установлено, что высокую штампуемость имеют листы с мелкозернистой структурой и наклонной базисной текстурой с малыми углами наклона кристаллографических плоскостей (0001) к плоскости листа. К резкому снижению пластичности и растрескиванию металла на тех или иных операциях ступенчатого набора приводят увеличение среднего размера зерна выше 50...60 мкм и присутствие призматической ориентировки $\{11\bar{2}0\}$ в исходных листах. Значительное снижение пластичности листов с указанными структурными характеристиками связано с тем, что в поверхностных слоях листа при многократных изгибных деформациях возникает интенсивная текстура $\{11\bar{2}0\}$ смены механизма разрушения.

Список использованных источников

1. Аверкиев Ю.А., Аверкиев А.Ю. Технология холодной штамповки: учебник для вузов. М.: Машиностроение, 1989. 304 с.
2. Адамеску Р.А., Гельд П.В., Митюшков Е.А. Анизотропия физических свойств металлов. М.: Metallurgia, 1985. 136 с.
3. Арышенский Ю.М., Гречников Ф.В. Теория и расчеты пластического формоизменения анизотропных материалов. М.: Metallurgia, 1990. 304 с.
4. Ашкенази Е.К. Анизотропия машиностроительных материалов. Л.: Машиностроение, 1969. 112 с.
5. Бакхауз Г. Анизотропия упрочнения. Теория в сопоставлении с экспериментом // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1976. №6. С. 120 - 129.
6. Басовский Л.Е. Прогнозирование повреждаемости деформируемых материалов при немонотонном нагружении // Известия вузов. Машиностроение. 1990. №2. С. 3 - 7.
7. Бастун В.Н. К условию пластичности анизотропных тел // Прикладная механика / АН УССР. Ин-т механика. Киев: Наукова думка. 1977. №1. С. 104 - 109.
8. Баудер У. Глубокая вытяжка пустотелых изделий из толстых листов // Проблемы современной металлургии: сборник сокращенных переводов и обзоров иностранной периодической литературы. М.: Иностранная литература. 1952. №2. С. 93 - 110.
9. Бебрис А.А. Устойчивость заготовки в формообразующих операциях листовой штамповки. Рига: Зинатие, 1978. 125с.
10. Богатов А.А. Механические свойства и модели разрушения металлов. Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2002. 329 с.
11. Богатов А.А., Мижирицкий О.И., Смирнов С.В. Ресурс пластичности металлов при обработке давлением. М.: Metallurgia, 1984. 144 с.
12. Быковцев Г.И. О плоской деформации анизотропных идеально-пластических тел // Известия АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1963. №2. С. 66 - 74.

13. Бэкофен В. Процессы деформации. М.: Металлургия, 1977. 260 с.
14. Валиев С.А. Комбинированная глубокая вытяжка листовых материалов. М.: Машиностроение, 1973. 176 с.
15. Теория образования текстур в металлах и сплавах. Я.Д. Вишняков [и др.] М: Наука, 1979.
16. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
17. Владимиров В.И. Физическая природа разрушения металлов. М.: Металлургия, 1984. 280 с.
18. Влияние кристаллографической текстуры на коэффициент нормальной пластической анизотропии ГПУ-металлов / Е.Ю. Поликарпов [и др.] // Известия высших учебных заведений. Цветная металлургия. 1990. № 2. С. 103-108.
19. Ву Э.М. Феноменологические критерии разрушения анизотропных сред // Механика композиционных материалов / Пер. с англ. М.: Мир, 1978. С. 401 - 491.
20. Вытяжка с утонением стенки / И.П. Ренне [и др.]. Тула: ТПИ, 1970. 141 с.
21. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. М.: Мир, 1984. 428 с.
22. Гельфонд В.Л. Построение математической модели процесса образования разностенности при вытяжке с утонением стенки // Исследования в области пластичности и обработки металлов давлением. Тула: ТПИ, 1974. Вып. 35. С. 60-68.
23. Геогджаев В.И. Пластическое плоское деформированное состояние ортотропных сред // Труды МФТИ. 1958. Вып. 1. С. 55 - 68.
24. Геогджаев В.О. Волочение тонкостенных анизотропных труб сквозь коническую матрицу // Прикладная механика. 1968. Т.4. Вып. 2. С. 79 - 83.
25. Головлев В.Д. Расчет процессов листовой штамповки. М.: Машиностроение, 1974. 136 с.

26. Грдилян Г.Л. Анализ стационарной стадии процесса реверсивной вытяжки цилиндрических стаканов // Исследования в области пластичности и обработки металлов давлением. Тула: ТПИ, 1974. Вып. 35. С. 72-78.
27. Грдилян Г.Л. Влияние анизотропии и упрочнения на изменение толщины стенки в процессе реверсивной вытяжки // Исследования в области пластичности и обработки металлов давлением. Тула: ТПИ, 1974. Вып. 2. С. 88-97.
28. Грдилян Г.Л. Влияние подпора на напряженно-деформированное состояние при реверсивной вытяжке заготовки из ортотропного упрочняющегося материала // Обработка металлов давлением. Тула: ТПИ, 1974. Вып. 25. С. 45-51.
29. Грдилян Г.Л. Учет упрочнения и анизотропии при анализе стационарной стадии реверсивной вытяжки // Исследования в области пластичности и обработки металлов давлением. Тула: ТПИ, 1975. Вып. 2. С. 21-30.
30. Грдилян Г.Л., Басовский Л.Е., Ренне И.П. Использование ресурса пластичности при реверсивной вытяжке // Исследования в области пластичности и обработки металлов давлением. Тула: ТПИ, 1977. Вып. 4. С. 18-24.
31. Грдилян Г.Л., Ренне И.П. Свободная реверсивная вытяжка (без матрицы) // Исследования в области пластичности и обработки металлов давлением. Тула: ТПИ, 1977. Вып. 4. С. 59-68.
32. Гречников Ф.В. Деформирование анизотропных материалов М.: Машиностроение, 1998. 446 с.
33. Губкин С.И. Пластическая деформация металлов. М.: Metallurgy, 1960. Т. 1. 376 с., Т. 2. 416 с., Т. 3. 306 с.
34. Гун Г.Я. Математическое моделирование процессов обработки металлов давлением. М.: Metallurgy, 1983. 352 с.
35. Данилов В.Л. К формулировке закона деформационного упрочнения // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1971. № 6. С. 146 - 150.
36. Дель Г.Д. Технологическая механика. М.: Машиностроение, 1978. 174 с.

37. Демин В.А. Проектирование процессов тонколистовой штамповки на основе прогнозирования технологических отказов. М.: Машиностроение, 2002. 186 с.
38. Джонсон В., Кудо Х. Механика процессов выдавливания металлов. М.: Металлургия, 1965. 197 с.
39. Джонсон У., Меллор П. Теория пластичности для инженеров. М.: Машиностроение, 1979. 567 с.
40. Евдокимов А.К. Холодное выдавливание сложнопрофильных изделий // Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением. 2005. № 1. С. 9 – 17.
41. Евдокимов А.К., Назаров А.В. Дифференцированное выдавливание с одновременной вытяжкой // Известия ТулГУ. Серия. Механика деформированного твердого тела и обработка металлов давлением. 2004. Вып. 3. С. 101 - 106.
42. Евдокимов А.К., Назаров А.В. Учет противодействия при обратном выдавливании с активным трением // Заготовительные производства в машиностроении. 2007. № 11. С. 28-35.
43. Евдокимов А.К., Петров Б.В. Механизм образования утяжины в ступенчатой стенке выдавленного стакана // Известия ТулГУ. Серия. Механика деформированного твердого тела и обработка металлов давлением. 2004. Вып. 3. С. 74 - 81.
44. Евдокимов А.К., Рыбин А.Ю. Комбинированное выдавливание кольцевых заготовок // Известия ТулГУ. Серия. Механика деформируемого твердого тела и обработка металлов давлением. Тула: Изд-во ТулГУ, 2005. Вып. 1. С. 200 – 208.
45. Евдокимов А.К., Чернова Ю.В. Влияние трения на контактных поверхностях инструмента на силу вытяжки с утонением // Известия ТулГУ. Серия. Механика деформируемого твердого тела и обработка металлов давлением. Тула: Изд-во ТулГУ, 2006. Вып. 1. С. 206 -214.
46. Егоров М.И. Определение коэффициента поперечных деформаций листового проката с начальной анизотропией на цилиндрических образцах // Заводская лаборатория. 1988. № 11. С. 79 - 82.

47. Ерманок М.З. Прессование труб и профилей специальной формы. Теория и технология. М.: Металлургия, 1992. 304 с.
48. Жарков В.А. Методика разработки технологических процессов вытяжки с учетом анизотропии листовых материалов // Кузнечно-штамповочное производство. 1994. №10. С. 5 - 9.
49. Жарков В.А. Перспективы экономии металла в листоштамповочном производстве // Кузнечно-штамповочное производство. 1991. №12. С. 7 - 11.
50. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.
51. Зубцов М.Е. Листовая штамповка. Л.: Машиностроение, 1980. 432 с.
52. Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И. Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 232 с.
53. Изотермическое деформирование высокопрочных анизотропных металлов / С.П. Яковлев [и др.]. М: Машиностроение, 2004. 427 с.
54. Ильюшин А.А. Пластичность. М.: Изд-во АН СССР. 1963. 207 с.
55. Исследование параметров анизотропии в процессах ротационной вытяжки / А.И. Вальтер [и др.] // Исследования в области пластичности и обработки металлов давлением. Тула: ТПИ, 1986. С. 156 - 160.
56. Карпушин Н.И., Тутнов А.А. Определяющие уравнения анизотропной пластичности материалов для математической модели со смещающейся, расширяющейся и разворачивающейся поверхностью текучести // Вопросы атом. науки и техн. Атом. материаловеден. 1988. №1/26. С. 8 - 13.
57. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 312 с.
58. Кибардин Н.А. Исследование пластической анизотропии металла статистическим методом // Заводская лаборатория. 1981. № 9. С. 85 - 89.
59. Ковка и штамповка. Справочник в 4-х т. // Ред. совет: Е.И. Семенов [и др.] Т. 4. Листовая штамповка / под ред. А.Д. Матвеева. М.: Машиностроение, 1987. 544 с.

60. Колесников Н.П. Зависимость штампуемости стали от анизотропии при вытяжке деталей сложной формы // Кузнечно-штамповочное производство. 1962. № 8. С. 18 - 19.
61. Колесников Н.П. Расчет напряженно-деформированного состояния при вытяжке с учетом анизотропии // Кузнечно-штамповочное производство. 1963. № 9. С. 15 - 19.
62. Колмогоров В.Л. Механика обработки металлов давлением. Екатеринбург: Уральский государственный технический университет (УПИ), 2001. 836 с.
63. Колмогоров В.Л. Механика обработки металлов давлением. М.: Металлургия, 1986. 688 с.
64. Колмогоров В.Л., Мигачев Б.А., Бурдуковский В.Г. Феноменологическая модель накопления повреждений и разрушения при различных условиях нагружения. Екатеринбург: УрОРАМ, 1994. 104 с.
65. Комплексы технологий и научное обеспечение производственных процессов пластического формообразования особо ответственных деталей машиностроения из высокопрочных анизотропных материалов / Е.Ю. Поликарпов [и др.] // Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением. 2008. № 7. С. 18-22.
66. Кудрявцев И.П. Текстуры в металлах и сплавах. М.: Металлургия, 1965. 292 с.
67. Кузин В.Ф. Влияние анизотропии на разностенность при вытяжке с утонением стенки // Обработка металлов давлением. Тула: ТПИ, 1971. С. 171 - 176.
68. Кузин В.Ф., Юдин Л.Г., Ренне И.П. Изменение показателя анизотропии в процессе многооперационной вытяжки с утонением стенки // Прогрессивная технология глубокой вытяжки листовых материалов. Тула: ТПИ, 1968. С. 229 - 234.
69. Лемешев П.В. Производственный опыт разработки прогрессивных техпроцессов штамповки тонколистовых деталей. М.: Изд-во НПО «Энергия», 1983. 60 с.

70. Листовая штамповка: Расчет технологических параметров: справочник / В.И. Ершов [и др.]. М.: Изд-во МАИ, 1999. 516 с.
71. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение. 1975. 400 с.
72. Малинин Н.Н. Технологические задачи пластичности и ползучести. М.: Высшая школа, 1979. 119 с.
73. Малов А.Н. Производство патронов стрелкового оружия. М.: Оборонгиз, 1947. 414 с.
74. Малоотходная, ресурсосберегающая технология штамповки / под ред. В.А. Андрейченко, Л.Г. Юдина, С.П. Яковлева. Кишинев: Universitas. 1993. 240с.
75. Маркин А.А., Яковлев С.С. Влияние вращения главных осей ортотропии на процессы деформирования анизотропных, идеально-пластических материалов // Механика твердого тела. 1996. №1. С. 66 - 69.
76. Маркин А.А., Яковлев С.С., Здор Г.Н. Пластическое деформирование ортотропного анизотропно-упрочняющегося слоя // Вести АН Беларуси. Технические науки. Минск. 1994. №4. С. 3 - 8.
77. Мельников Э.Л. Холодная штамповка днищ. М.: Машиностроение, 1986. 192 с.
78. Микляев П.Г., Фридман Я.Б. Анизотропия механических свойств металлов. М.: Metallургия, 1986. 224 с.
79. Недорезов В.Е. Глубокая вытяжка листового металла. М., Л.: Машгиз, 1949. 104 с.
80. Неймарк А.С. К вопросу об определении параметров анизотропии ортотропных материалов // Известия вузов СССР. Машиностроение. 1975. № 6. С. 5 - 9.
81. Некоторые пути управления текстурой и структурой сварных соединений α - сплавов титана / Е.Ю. Поликарпов [и др.] // Известия высших учебных заведений. Цветная металлургия. 1986. № 5. С. 93-96.
82. Нечепуренко Ю.Г. Перспективные технологии изготовления цилиндрических изделий. Тула: ТулГУ, 2001. 263 с.

83. Нечепуренко Ю.Г., Яковлев С.П., Яковлев С.С. Глубокая вытяжка цилиндрических изделий из анизотропного материала. Тула: ТулГУ, 2000. 195 с.
84. Обозов И.П. Анализ процесса свертки с утонением стенки // Исследования в области пластичности и обработки металлов давлением. Тула: ТПИ, 1973. Вып. 29. С. 194 - 208.
85. Овчинников А.Г. Основы теории штамповки выдавливанием на прессах. М.: Машиностроение, 1983. 200 с.
86. Овчинников А.Г., Жарков В.А. Исследование влияния анизотропии на вытяжку листового металла // Известия вузов. Машиностроение. 1979. № 8. С. 94 - 98.
87. Огородников В.А. Оценка деформируемости металлов при обработке давлением. Киев: Вища школа, 1983. 175 с.
88. Пилипенко О.В. Обжим и раздача трубных заготовок из анизотропных материалов. Тула: Изд-во ТулГУ, 2007. 150 с.
89. Пилипенко О.В. Обжим и раздача трубных заготовок из анизотропных материалов // Заготовительные производства в машиностроении. 2007. № 11. С. 22-28.
90. Пилипенко О.В., Яковлев С.С., Трегубов В.И. Вытяжка с утонением стенки цилиндрических деталей из двухслойных анизотропных материалов // Заготовительные производства в машиностроении. 2008. №1. С. 30-35.
91. Подлесный С.В., Поликарпов Е.Ю. Математическая модель реверсивной вытяжки осесимметричных деталей из анизотропного материала // Известия ТулГУ. Серия. Механика деформируемого твердого тела и обработка металлов давлением. Тула: Изд-во ТулГУ, 2006. Вып. 3. С. 232-239.
92. Поликарпов Е.Ю. Взаимосвязь характеристик разрушения полуфабриката в процессе многооперационной вытяжки со структурой и текстурой титанового сплава ПТ-3Вкт // Известия ТулГУ. Серия. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2007. Вып. 2. С. 21 – 25.
93. Поликарпов Е.Ю. Влияние длительности отжига на текстуру листов из сплава ПТ-3Вкт // Известия ТулГУ. Серия. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ.

2009. Вып. 2. С. 128-131.

94. Поликарпов Е.Ю. Влияние технологических параметров на неоднородность механических свойств при обратном выдавливании трубных заготовок // Труды Международного научного симпозиума «Автостроение 2009». Сек. 6. Машина и технологии заготовительного производства. М.: МГТУ «МАМИ». 2009.

95. Поликарпов Е.Ю. Выдавливание оребрений на плитах // Вестник машиностроения. 2008. № 8. С. 68-71.

96. Поликарпов Е.Ю. Вытяжка с утонением стенки толстостенных цилиндрических заготовок из анизотропных материалов // Вестник машиностроения. 2009. № 7. С. 62-68.

97. Поликарпов Е.Ю. Вытяжка ступенчатых деталей из анизотропного материала // Известия ТулГУ. Серия. Механика деформированного твердого тела и обработка металлов давлением. 2004. Вып. 2. С. 86 - 93.

98. Поликарпов Е.Ю. Изменение текстуры полусферических днищ из титанового сплава ПТ-3Вкт в процессе многооперационной вытяжки // Известия ТулГУ. Серия. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2007. Вып. 2. С. 113 – 118.

99. Поликарпов Е.Ю. Математическое моделирование операции реверсивной вытяжки цилиндрических и осесимметричных деталей из анизотропного материала // Известия ТулГУ. Серия. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2009. Вып. 2. С. 144-153.

100. Поликарпов Е.Ю. Многооперационная вытяжка ступенчатых осесимметричных деталей из анизотропного материала // Известия ТулГУ. Серия. Механика деформируемого твердого тела и обработка металлов давлением. Тула: Изд-во ТулГУ, 2005. Вып. 1. С. 101 – 108.

101. Поликарпов Е.Ю. Неоднородность механических свойств при обратном выдавливании трубных заготовок // Известия ТулГУ. Серия. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2009. Вып. 2. Часть 2. С. 82-84.

102. Поликарпов Е.Ю. Новый технологический процесс изготовления

толстостенных цилиндрических заготовок // Вестник ТулГУ. Автоматизация: проблемы, идеи, решения. Тула: ТулГУ, 2009. Часть II. С. 22-27.

103. Поликарпов Е.Ю. Обратное выдавливание толстостенных трубных заготовок из анизотропных материалов // Заготовительные производства в машиностроении (Кузнечно-штамповочное, литейное и другие производства). 2009. №2. С. 20-24.

104. Поликарпов Е.Ю. Особенности процесса реверсивной вытяжки осесимметричных деталей с фланцем из анизотропного материала // Материалы Третьей научно-технической конференции «Металлофизика, механика материалов, наноструктуры и процессы деформирования Металлдеформ-2009», 2009. Самара: СГАУ. Т2. С.183-192.

105. Поликарпов Е.Ю. Оценка силовых режимов реверсивной вытяжки осесимметричных деталей с фланцем из трансверсально-изотропного материала // Известия ТулГУ. Серия. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2009. Вып. 1. Часть 1. С. 129-136.

106. Поликарпов Е.Ю. Проектирование технологических процессов изготовления полуторовых днищ // Известия ТулГУ. Серия. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2009. Вып. 3. С. 12-19.

107. Поликарпов Е.Ю. Реверсивная вытяжка осесимметричных деталей с фланцем из анизотропного материала // Известия ТулГУ. Серия. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2008. Вып. 3. С. 3-14.

108. Поликарпов Е.Ю. Реверсивная вытяжка осесимметричных деталей с фланцем из анизотропных материалов // Обработка материалов давлением (Обробка матеріалів тиском): сборник научных трудов. Украина, Краматорск: ДГМА, №2 (21) 2009. С. 161-169.

109. Поликарпов Е.Ю. Связь характеристик анизотропии с кристаллографической текстурой гексагональных плотноупакованных металлов // Известия ТулГУ. Серия. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2008. Вып. 1. С. 117-124.

110. Поликарпов Е.Ю. Силовые режимы и предельные возможности обратного

выдавливания толстостенных трубных заготовок из анизотропных материалов // Известия ТулГУ. Серия. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2008. Вып. 4. С. 61-69.

111. Поликарпов Е.Ю. Совершенствование технологии холодной штамповки полусферических тонкостенных днищ // Известия ТулГУ. Серия. Механика деформированного твердого тела и обработка металлов давлением. 2004. Вып. 3. С. 141 - 147.

112. Поликарпов Е.Ю. Технологические параметры многооперационной вытяжки ступенчатых осесимметричных деталей из анизотропных материалов // Известия ТулГУ. Серия. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2008. Вып. 1. С. 94-103.

113. Поликарпов Е.Ю. Технологические режимы операции вытяжки с утонением стенки толстостенных заготовок из анизотропных материалов // Известия ТулГУ. Серия. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2009. Вып.3. С. 93-104.

114. Поликарпов Е.Ю. Технология многооперационной вытяжки полусферических тонкостенных днищ // Известия ТулГУ. Серия. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2008. Вып. 1. С. 80-87.

115. Поликарпов Е.Ю. Штамповка полусферических тонкостенных днищ // Заготовительные производства в машиностроении (Кузнечно-штамповочное, литейное и другие производства). 2009. №11. С. 15-18.

116. Поликарпов Е.Ю., Подлесный С.В. Влияние анизотропии механических свойств на предельные возможности формоизменения многооперационной вытяжки ступенчатых осесимметричных деталей // Известия ТулГУ. Серия. Механика деформируемого твердого тела и обработка металлов давлением. Тула: Изд-во ТулГУ, 2006. Вып. 2. С. 171 – 175.

117. Поликарпов Е.Ю., Подлесный С.В. К оценке предельных возможностей операции реверсивной вытяжки осесимметричных деталей из анизотропного материала // Известия ТулГУ. Серия. Механика деформируемого твердого тела и обработка металлов давлением. Тула: Изд-во ТулГУ, 2006. Вып. 4. С. 47-53.

118. Поликарпов Е.Ю., Подлесный С.В. Предельные возможности операции

реверсивной вытяжки осесимметричных деталей с фланцем из анизотропного материала // Известия ТулГУ. Серия. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2007. Вып. 2. С. 185 – 188.

119. Поликарпов Е.Ю., Подлесный С.В. Силовые режимы и предельные возможности формоизменения многооперационной вытяжки ступенчатых осесимметричных деталей из анизотропного материала // Известия ТулГУ. Серия. Механика деформируемого твердого тела и обработка металлов давлением. Тула: Изд-во ТулГУ, 2005. Вып. 2. С. 88-98.

120. Поликарпов Е.Ю., Подлесный С.В. Силовые режимы реверсивной вытяжки осесимметричных деталей с фланцем из анизотропного материала // Известия ТулГУ. Серия. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2007. Вып.2. С. 78 – 84.

121. Поликарпов Е.Ю., Чудин В.Н. Вязкопластическое формообразование оребренных панелей // Технология машиностроения, 2009. № 3 (81). С.16-20.

122. Поликарпов Е.Ю., Чудин В.Н. Изотермическое формообразование деталей с утолщениями // Вестник машиностроения. 2008. № 6. С. 60-62.

123. Поликарпов Е.Ю., Чудин В.Н. Оценка критических условий горячей гибки с растяжением // Заготовительные производства в машиностроении (Кузнечно-штамповочное, литейное и другие производства). 2008. № 7. С. 28-31.

124. Поликарпов Е.Ю., Чудин В.Н., Нечепуренко Ю.Г. Верхнеграничные оценки параметров вытяжки на радиальной матрице // Известия ТулГУ. Серия. Механика деформируемого твердого тела и обработка металлов давлением. Тула: Изд-во ТулГУ, 2006. Вып. 2. С. 146 – 149.

125. Полухин П.И., Горелик С.С., Воронцов В.К. Физические основы пластической деформации. М.: Металлургия, 1982. 584 с.

126. Попов Е.А. Основы теории листовой штамповки. М.: Машиностроение, 1968. 283 с.

127. Попов Е.А., Ковалев В.Г., Шубин И.Н. Технология и автоматизация листовой штамповки. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. 480 с.

128. Прогрессивные технологические процессы холодной штамповки / Ф.В. Гречников [и др.]; под ред. А.Г. Овчинникова. М.: Машиностроение, 1985. 184 с.
129. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
130. Ренне И.П. Предпосылки теоретического и экспериментального изучения процесса вытяжки с утонением стенки на основе кинематических принципов плоского течения // Прогрессивная технология глубокой вытяжки листовых материалов. Тула: Приокское книжн. изд-во, 1968. С. 160 - 169.
131. Ренне И.П., Басовский Л.Е. Ресурс пластичности при волочении, вытяжке с утонением и гидропрессовании // Обработка металлов давлением. Свердловск: УПИ. 1977. Вып.4. С. 92 - 95.
132. Ресурс пластичности при вытяжке с утонением / Л.Е. Басовский [и др.] // Кузнечно-штамповочное производство. 1977. № 8. С. 27 - 30 .
133. Романовский В.П. Справочник по холодной штамповке. Л.: Машиностроение, 1979. 520 с.
134. Рузанов Ф.И. Локальная устойчивость процесса деформации ортотропного листового металла в условиях сложного нагружения // Машиноведение / АН СССР. 1979. №4. С. 90 - 95.
135. Рузанов Ф.И. Определение критических деформаций при формообразовании детали из анизотропного листового металла // Машиноведение. 1974. № 2. С. 103 - 107.
136. Сегал В.М. Технологические задачи теории пластичности. Минск: Наука и техника, 1977. 256 с.
137. Селедкин Е.М., Гвоздев А.Е. Математическое моделирование процессов формоизменения заготовок. М.: Академия проблем качества; ТулГУ, 1998. 225 с.
138. Скуднов В.А. Закономерности предельной пластичности металлов // Проблемы прочности. 1982. №9. С. 72 - 80.
139. Смирнов В.С. Теория обработки металлов давлением. М.: Metallургия, 1973. 496 с.

140. Смирнов В.С., Дурнев В.Д. Текстурирование при прокатке. М.: Металлургия, 1971. 254 с.
141. Смирнов-Аляев Г.А. Сопротивление материалов пластическому деформированию. Л.: Машиностроение, 1978. 368 с.
142. А.с. №227619 СССР. Способ изготовления днищ топливных баков из титановых сплавов/ Е.Ю. Поликарпов [и др.]. (СССР), 1985. 1 с.
143. Способ штамповки тонкостенных полусферических днища и устройство для его осуществления / Е.Ю. Поликарпов [и др.]. Положительное решение на заявку № 2008140592 от 13.10.2008. МПК⁸В21D22/28; В21D51/08.
144. Соколов Л.Д., Скуднов В.А. Закономерности пластичности металлов. М.: ООТИВИЛС. 1980. 130 с.
145. Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. 608 с.
146. Степанский Л.Г. Расчеты процессов обработки металлов давлением. М.: Машиностроение, 1979. 215 с.
147. Сторожев М.В., Попов Е.А. Теория обработки металлов давлением. М.: Машиностроение, 1977. 423 с.
148. Талыпов Г.Б. Исследование эффекта Баушингера // Известия АН СССР. Механика и машиностроение. 1964. № 6. С. 131 - 137.
149. Талыпов Г.П. Пластичность и прочность стали при сложном нагружении. Л.: Изд-во ЛГУ. 1968. 134 с.
150. Теория обработки металлов давлением: учебник для вузов / В.А. Голенков [и др.]; под ред. В.А. Голенкова, С.П. Яковлева. М.: Машиностроение, 2009. 442 с.
151. Теория пластических деформаций металлов / Е.П. Унксов [и др.]; под ред. Е.П. Унксова, А.Г. Овчинникова. М.: Машиностроение, 1983. 598 с.
152. Технология конструкционных материалов (Технологические процессы в машиностроении): учебник для студентов машиностроительных специальностей вузов: в 4 ч. Ч. 3. Производство заготовок / С.П. Яковлев [и др.]. Тула: Изд-во ТулГУ, 2007. 582 с.

153. Томилов Ф.Х. Зависимость пластичности металлов от истории деформирования // Обработка металлов давлением. Свердловск: УПИ, 1987. С. 71-74.
154. Томленов А.Д. Пластическое деформирование металлов. М.: Металлургия, 1972. 408 с.
155. Томсен Э., Янг Ч., Кобаяши Ш. Механика пластических деформаций при обработке металлов. М.: Машиностроение. 1969. 362 с.
156. Трегубов В.И., Яковлев С.П., Яковлев С.С. Технологические параметры вытяжки с утонением стенки двухслойного упрочняющегося материала // Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением. 2005. № 1. С. 29 – 35.
157. Углов А.Л., Гайдученя В.Ф., Соколов П.Д. Оценка деформационной анизотропии механических свойств сплавов акустическим методом // Обработка металлов давлением. Свердловск: УПИ, 1987. С. 34 - 37.
158. Хван Д.В. Технологические испытания металлов. Воронеж: Изд-во Воронежского ун-та, 1992. 152 с.
159. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: ГИТТЛ, 1956. 408 с.
160. Цой Д.Н. Волочение тонкостенной трубы через коническую матрицу // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1987. № 4. С. 182 - 184.
161. Цой Д.Н. Предельная степень вытяжки анизотропной листовой заготовки // Известия вузов. Машиностроение. 1986. № 4. С. 121 - 124.
162. Чернова Ю.В., Евдокимов А.К. Ресурс пластичности при вытяжке с утонением в конической матрице // Известия ТулГУ. Серия. Механика деформируемого твердого тела и обработка металлов давлением. Тула: Изд-во ТулГУ, 2006. Вып. 2. С. 208 – 216.
163. Чудин В.Н, Поликарпов Е.Ю. Выдавливание с осадкой фланцевых утолщений при вязкопластичности // Известия ТулГУ. Серия. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2009. Вып. 2. С. 99-106.
164. Чудин В.Н., Поликарпов Е.Ю. Верхнеграничные расчеты технологии листовой штамповки // Вестник машиностроения. 2007. № 10. С. 54-57.

165. Чудин В.Н., Поликарпов Е.Ю. Вязкопластическое формообразование оребрений // Известия ТулГУ. Серия. Механика деформируемого твердого тела и обработка металлов давлением. Тула: Изд-во ТулГУ, 2006. Вып. 4. С. 60-68.

166. Чудин В.Н., Поликарпов Е.Ю. Изгиб с нагревом элементов оболочек // Заготовительные производства в машиностроении (Кузнечно-штамповочное, литейное и другие производства). 2008. № 5. С. 17-21.

167. Чудин В.Н., Поликарпов Е.Ю. Энергетические расчеты при вытяжке на радиальной матрице // Известия ТулГУ. Серия. Механика деформируемого твердого тела и обработка металлов давлением. Тула: Изд-во ТулГУ, 2006. Вып. 1. С. 280 - 289.

168. Шевелев В.В., Яковлев С.П. Анизотропия листовых материалов и ее влияние на вытяжку. М.: Машиностроение, 1972. 136 с.

169. Шляхин А.Н. Оценка надежности технологических переходов глубокой вытяжки осесимметричных цилиндрических деталей без утонения // Вестник машиностроения. 1995. №4. С. 33 - 36.

170. Шляхин А.Н. Прогнозирование разрушения материала при вытяжке цилиндрических деталей без утонения // Вестник машиностроения. 1995. №5. С. 35 - 37.

171. Шляхин А.Н. Расчет напряжений в опасном сечении при вытяжке без утонения цилиндрических деталей // Кузнечно-штамповочное производство. 1995. №6. С. 8 - 11.

172. Шофман Л.А. Теория и расчеты процессов холодной штамповки. М.: Машиностроение, 1964. 365 с.

173. Яковлев С.П., Кухарь В.Д. Штамповка анизотропных заготовок. М.: Машиностроение, 1986. 136 с.

174. Яковлев С.П., Пилипенко О.В., Безотосный Д.А. Анализ силовых режимов процесса вытяжки с утонением двухслойных анизотропных материалов // Известия ТулГУ. Серия. Механика деформируемого твердого тела и обработка металлов давлением. Тула: Изд-во ТулГУ, 2006. Вып. 1. С. 3 – 17.

175. Яковлев С.П., Яковлев С.С., Андрейченко В.А. Обработка давлением анизотропных материалов. Кишинев: Квант, 1997. 331 с.

176. Яковлев С.С., Калашников А.Е., Поликарпов Е.Ю. Гофрообразование кольцевой заготовки из анизотропного материала // Материалы Международной научно-технической конференции «Прогрессивные методы и технологическое оснащение процессов обработки металлов давлением». Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, 2009. С. 163-166.

177. Яковлев С.С., Нечепуренко Ю.Г., Суков М.В. Пластическое деформирование ортотропного анизотропно-упрочняющегося материала // Известия ТулГУ. Серия. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2007. Вып. 2. С. 9 – 14.

178. Яковлев С.С., Пилипенко О.В. Изотермическая вытяжка анизотропных материалов. М.: Изд-во Машиностроение, 2007. 212 с.

179. Яковлев С.С., Поликарпов Е.Ю. Вытяжка с утонением стенки толстостенных цилиндрических заготовок из анизотропных материалов // Вестник машиностроения. 2009. № 10. С. 63-69.

180. Яковлев С.С., Поликарпов Е.Ю. Теория деформирования анизотропных упрочняющихся материалов // Материалы Международной научно-технической конференции «Современные достижения в теории и технологии пластической обработки металлов давлением». Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский государственный политехнический университет. 2007. С. 139-143.

181. Яковлев С.С., Поликарпов Е.Ю. Технологические параметры процесса реверсивной вытяжки осесимметричных деталей с фланцем из анизотропного материала // Заготовительные производства в машиностроении. 2009. № 2.

182. Яковлев С.С., Поликарпов Е.Ю. Формирование разностенности осесимметричных деталей с фланцем при реверсивной вытяжке из анизотропного материала // Известия ТулГУ. Серия. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2008. Вып. 4. С. 101-105.

183. Осесимметричное обратное выдавливание анизотропной трубной заготовки / С.С. Яковлев [и др.] // Материалы Международной научно-технической

конференции «Прогрессивные методы и технологическое оснащение процессов обработки металлов давлением». Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский государственный политехнический университет. 2009. С. 166-169.

184. Яковлев С.С., Поликарпов Е.Ю., Паламарчук И.И. Пластическое деформирование анизотропных упрочняющихся материалов // Прогрессивные методы и технологическое оснащение процессов обработки металлов давлением: сб. тезисов междунаро. науч.-тех. конф. СПб.: Изд-во БГТУ «Военмех» им. Д.Ф. Устинова. 2005. С. 142 – 145.

185. Яковлев С.С., Поликарпов Е.Ю., Подлесный С.В. Оценка предельных возможностей формоизменения многооперационной вытяжки ступенчатых осесимметричных деталей из анизотропного материала // Известия ТулГУ. Серия. Механика деформируемого твердого тела и обработка металлов давлением. Тула: Изд-во ТулГУ, 2006. Вып. 2. С. 114 – 119.

186. Яковлев С.С., Трегубов В.И., Нечепуренко Ю.Г. Глубокая вытяжка анизотропного упрочняющегося материала // Заготовительные производства (Кузнечно-штамповочное, литейное и другие производства). 2005. № 4. С. 38 – 44.

187. Baltov A., Savchuk A. A Rule of Anisotropik Harolening // Acta Mechanica. 1965. Vol.1. №2. P. 81-92.

188. Bhattacharyya D., Moltchaniwskyi G. Measurements of Anisotropy by the Ring Compression Test // J. Mech. Work. Technol. 1986. 13. №3. P. 325 - 330.

189. Korhonen A.S. Drawing Force in Deep Drawing of Cylindrical Cup with Flatnosed Punch // Trans. ASME J.Eng. Jnd. 1982. 104. №1. P. 29-37.

190. Korhonen A.S., Sulonen M. Force Requirements in Deep Drawing of Cylindrical Shell // Met. Sci. Rev. met. 1980. 77. №3. P. 515 - 525.

191. Lankford W.T., Snyder S.C., Bauscher J.A. New criteria for predicting the press performance of deep drawing sheets // Trans ASM. 1950. V. 42. P. 1197.

192. Lilet L., Wybo M. An investigation into the effect of plastic anisotropy and rate of work-hardening in deep drawing. // *Sheet Metal Inds.* 41. №450, 1964.
193. Mellor P.B., Parmar A. *Plasticity Analysis of Sheet Metal Forming* // *Mech. Sheet Metal Forming Mater. Behav. and Deformation Anal. Proc. Symp.* Warren, Mich. New York-London . 1977. P. 53 - 74.
194. Oiszak W., Urbanovski W. The Generalised Distortion Energy in the Theory of Anisotropic Bodies // *Bull. Acad. Polon. Sci. -cl. IV. vol.5. №1.* 1957. P. 29 - 45.
195. Wu M.C., Yeh W.C. Some Considerations in the Endochronic Description of Anisotropic Hardening // *Acta. Mech.* 1987. 69. №1. P. 59 - 76.
196. Wu M.C., Hong H.K., Shiao Y.P. Anisotropic plasticity with application to sheet metals // *Int. J. Mech. Sci.* 1999. 41, № 6. C. 703 - 724.
197. Yamada Y., Koide M. Analysis of the Bore-Expanding Test by the Incremental Theory of Plasticity // *Int. J. Mech. Sci.* Vol. 10. 1968. P. 1-14.
198. Zharkov V.A. *Theory and Practice of Deep Drawing.* London: Mechanical Engineering Publications Limited, 1995. 601 p.

Приложение 1.
**Практические занятия по курсу «Теория обработки
металлов давлением»**

Министерство образования и науки Российской Федерации

ФГБОУ ВПО «Тульский государственный университет»

**Дисциплина «ТЕОРИЯ ОБРАБОТКИ МЕТАЛЛОВ
ДАВЛЕНИЕМ»**

**Методические указания по проведению практических занятий по
курсу «Теория обработки металлов давлением»**

Под редакцией д-ра техн. наук
С.С. Яковлева

Направление подготовки: 150400 «Технологические машины
и оборудование»

Специальность: 150201 «Машины и технология обработки металлов
давлением»

Форма обучения: очная, заочная

Тула - 2011

СОДЕРЖАНИЕ

Тема 1. Теория напряжённого состояния	3
1.1. Основные уравнения теории напряжений.....	3
1.2. Примеры решения задач.....	5
Тема 2. Теория деформированного состояния	15
2.1. Основные соотношения теории малых деформаций.....	15
2.2. Примеры решения задач.....	19
Тема 3. Теория пластичности	27
3.1. Основные соотношения теории пластичности.....	27
3.2. Примеры решения задач.....	28
Тема 4. Теория ползучести	40
4.1. Основные уравнения теории ползучести.....	40
4.2. Примеры решения задач.....	41
Тема 5. Метод осредненных напряжений (инженерный метод)	50
5.1. Основные допущения и предположения.....	50
5.2. Примеры решения задач.....	51
Тема 6. Метод линий скольжения (характеристик)	63
6.1. Сущность метода.....	63
6.2. Примеры решения задач.....	64
Тема 7. Метод верхних оценок	75
7.1. Подход к анализу процессов обработки металлов давлением.....	75
7.2. Примеры решения задач.....	76
Тема 8. Метод конечных элементов	94
8.1. Сущность метода.....	94
8.2. Дискретизация области и конечные элементы.....	95
8.3. Локальная аппроксимация искомой функции на конечном элементе.....	95
8.4. Скорости деформаций.....	97
8.5. Особенности использования МКЭ для жестко-пластического тела.....	98
8.6. Основные соотношения и уравнения.....	99
8.7. Минимизация функционала. Составление системы линейных алгебраических уравнений. Их решение.....	100
8.8. Определение напряжений в очаге деформации.....	102
8.9. Задача о раздаче тонкостенной цилиндрической трубы внутренним давлением.....	104
8.10. Примеры решения задач.....	106
Список литературы	111

Тема 1. Теория напряжённого состояния

План

- 1.1. Основные уравнения теории напряжений
- 1.2. Примеры решения задач

1.1. Основные уравнения теории напряжений

Напряжённое состояние в точке тела считается известным, если вычислены напряжения на любой площадке, проходящей через рассматриваемую точку. В декартовой системе координат x, y, z напряжённое состояние в точке описывается тензором напряжений

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

где $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ и $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ - нормальные и касательные компоненты напряжения.

Для этой системы справедлив закон парности касательных напряжений:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}. \quad (1.2)$$

Проекция полного напряжения p_v , действующего на площадке с внешней нормалью \bar{v} и направляющими косинусами l, m, n , определяются соотношениями

$$\left. \begin{aligned} X_v &= \sigma_{xx} l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n; \\ Y_v &= \tau_{xy} l + \sigma_{yy} m + \tau_{zy} n; \\ Z_v &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_{zz} n. \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

Если соотношение (1.3) применить к элементу, находящемуся на поверхности тела, то получим зависимости, связывающие компоненты напряжений у поверхности с внешними силами на поверхности.

Нормальные и касательные напряжения на произвольной площадке вычисляются по формулам

$$\sigma_v = \sigma_{xx} l^2 + \sigma_{yy} m^2 + \sigma_{zz} n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} ln; \quad (1.4)$$

$$\tau_v = \sqrt{X_v^2 + Y_v^2 + Z_v^2 - \sigma_v^2}. \quad (1.5)$$

Наряду с тензором напряжений напряжённое состояние тела в точке можно характеризовать главными напряжениями и главными направлениями напряжений.

Главные напряжения являются корнями кубического уравнения

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (1.6)$$

или
$$\sigma^3 - J_1\sigma^2 - J_2\sigma - J_3 = 0 \quad (1.7)$$

Величины J_1, J_2, J_3 , определяемые соотношениями

$$J_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = 3\sigma_{cp};$$

$$J_2 = -\sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{zz}\sigma_{xx} + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2;$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}, \quad (1.8)$$

называются алгебраическими инвариантами.

Направляющие косинусы l_K, m_K, n_K , которые определяют ориентацию главных направлений напряжений σ_K , можно найти, решив совместно два любых уравнения системы

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_{xx} - \sigma_K)l_K + \tau_{yx}m_K + \tau_{zx}n_K &= 0; \\ \tau_{xy}l_K + (\sigma_{yy} - \sigma_K)m_K + \tau_{zy}n_K &= 0; \\ \tau_{xz}l_K + \tau_{yz}m_K + (\sigma_{zz} - \sigma_K)n_K &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

и уравнение

$$l_K^2 + m_K^2 + n_K^2 = 1. \quad (1.10)$$

При изучении сложного напряжённого состояния важное значение имеют октаэдрическое касательное напряжение τ_8 , интенсивность нормальных σ_i и касательных T напряжений, которые определяются по выражениям

$$\left. \begin{aligned} \tau_8 &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}; \\ \sigma_i &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}; \\ T &= \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

Отметим, что

$$\sigma_i = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_8; T = \frac{\sigma_i}{\sqrt{3}}; \sigma_i = T \sqrt{3}. \quad (1.12)$$

Квадрат октаэдрического касательного напряжения, интенсивности нормальных и касательных напряжений пропорциональны второму инварианту \bar{J}_2 девиатора напряжений D_σ :

$$D_{\sigma} = \begin{pmatrix} S_{xx} & S_{yx} & S_{zx} \\ S_{xy} & S_{yy} & S_{zy} \\ S_{xz} & S_{yz} & S_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_{cp} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_{cp} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma_{cp} \end{pmatrix}, \quad (1.13)$$

где
$$\sigma_{cp} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3};$$

$$\begin{aligned} \bar{J}_1 &= 0; \bar{J}_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \\ &= \frac{1}{6} [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)]. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Компоненты напряжений связаны между собой дифференциальными уравнениями равновесия, которые в декартовой системе координат имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho X &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho Y &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho Z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

где X, Y, Z – проекции объёмных сил на оси координат; ρ – плотность металла.

В цилиндрической системе координат ρ, θ, z уравнения равновесия для осесимметричного напряжённого состояния записываются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{\rho\rho}}{\partial \rho} + \frac{\partial \tau_{z\rho}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\rho} - \sigma_{\theta}}{\rho} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

1.2. Примеры решения задач

Задача 1.1. Пластинка под действием напряжений σ_1 и σ_2 растягивается по двум взаимно перпендикулярным направлениям. Определить нормальное и касательное напряжение на площадке с нормалью \bar{v} .

Решение. Нормальное напряжение σ_v определим по выражению (1.4), в котором необходимо принять

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = \sigma_1; \sigma_{yy} = \sigma_2; \sigma_{zz} = 0; \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0; \\ l = \cos \alpha; m = \sin \alpha; n = 0. \end{aligned}$$

Тогда получим $\sigma_v = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha$.

Касательное напряжение τ_v вычислим по формуле (1.5). Для этого из выражений (1.3) найдём проекции полного напряжения на оси координат

$X_v = \sigma_1 \cos \alpha; Y_v = \sigma_2 \sin \alpha; Z_v = 0$, а затем

$$\tau_v = \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \alpha + \sigma_2^2 \sin^2 \alpha - \sigma_1^2 \cos^4 \alpha - 2\sigma_1 \sigma_2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha - \sigma_2^2 \sin^4 \alpha} = \\ = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha.$$

Окончательно получим

$$\sigma_v = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha; \tau_v = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha.$$

Задача 1.2. Пластика равномерно растягивается по двум взаимно перпендикулярным направлениям. Определить нормальные и касательные напряжения на любой площадке с нормалью \underline{V} .

Решение. В формулах по определению нормального и касательного напряжений, полученных в задаче 1.1, нужно принять $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = \sigma$. Тогда $\sigma_v = \sigma, \tau_v = 0$; это означает, что любая площадка является главной.

Задача 1.3. Пластика в одном направлении сжимается, в другом растягивается, причём $\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma$. Определить нормальные и касательные напряжения на площадках, накопленных к сторонам пластинки под углом 45° .

Решение. В выражениях для определения нормального и касательного напряжений, полученных при решении задачи 1.1, примем $\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma$ и $\alpha = 45^\circ$. Тогда $\sigma_v = 0; \tau_v = \sigma$.

Задача 1.4. В точке тела известны компоненты напряжений: $\sigma_{xx} = 5; \sigma_{yy} = 0; \sigma_{zz} = -3; \tau_{xy} = 5; \tau_{yz} = -7; \tau_{zx} = 8$. Компоненты напряжений даны в Н/мм².

Найти нормальное и касательное напряжения для площадки, нормаль к которой определяется направляющими косинусами

$$l = \frac{1}{2}; m = \frac{1}{2}; n = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Решение. Определим по формуле (1.4) нормальное напряжение. Затем по формулам (1.3) найдём проекции полного напряжения: $X_v = 10; Y_v = -2,46; Z_v = -1,62$.

$$\text{Полное напряжение } p_v = \sqrt{X_v^2 + Y_v^2 + Z_v^2}; \quad p_v = 11,2.$$

Касательное напряжение определяется по формуле (1.5):

$$\tau_v = \sqrt{p_v^2 - \sigma_v^2}; \quad \tau_v = 10,9.$$

Задача 1.5. В точке тела имеется следующая система напряжений: $\sigma_{xx} = 500; \sigma_{yy} = 0; \sigma_{zz} = 1100; \tau_{xy} = 300; \tau_{yz} = -300; \tau_{zx} = -800$. Компоненты

напряжений даны в Н/мм². Определить значения полного, нормального и касательного напряжений на площадке с внешней нормалью ν , направляющие косинусы которой относительно координатных осей равны между собой.

Решение. Величину нормального напряжения и проекции полного напряжения на площадке с направляющими косинусами $l=m=n$ найдём по формулам (1.4) и (1.3): $\sigma_\nu = 0$; $X_\nu = Y_\nu = Z_\nu = 0$. Из выражения (1.5) следует, что $\tau_\nu = 0$.

Таким образом, $\sigma_\nu = p_\nu = \tau_\nu = 0$, т.е. площадка свободна от напряжений.

Задача 1.6. В точке тела имеется следующая система напряжений: $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 500$; $\sigma_{zz} = -1000$; $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$. Компоненты напряжений даны в Н/мм². Определить нормальное, касательное и полное напряжения на октаэдрических площадках, проведённых через данную точку.

Решение. В соответствии с заданной системой напряжений устанавливаем, что $\sigma_1 = \sigma_2 = 500$; $\sigma_3 = -1000$.

Величину нормального напряжения на октаэдрической площадке находим по формуле

$$\sigma_8 = \sigma_{cp} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = 0.$$

Касательное напряжение на октаэдрической площадке определим по выражению (1.11):

$$\tau_8 = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}; \quad \tau_8 = 500\sqrt{2}.$$

Полное напряжение на октаэдрической площадке находим по формуле

$$p_8 = \sqrt{\sigma_8^2 + \tau_8^2}; \quad p_8 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 10^3.$$

Задача 1.7. Для некоторой точки тела известен тензор напряжений:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 15 \\ 0 & 20 & -15 \\ 15 & -15 & 0 \end{pmatrix}.$$

Компоненты напряжений даны в Н/мм². Разложить его на шаровой тензор и на девиатор напряжений, подсчитать второй инвариатор девиатора напряжений и показать, что первый инвариатор девиатора напряжений равен нулю.

Решение. Определим среднее напряжение:

$$\sigma_{cp} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3}; \quad \sigma_{cp} = 10.$$

Разложим тензор напряжений на шаровой тензор и девиатор:

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 15 \\ 0 & 10 & -15 \\ 15 & -15 & -10 \end{pmatrix}.$$

Найдём первый и второй инварианты девиатора напряжений:

$$\bar{J}_1 = S_{xx} + S_{yy} + S_{zz} = 0 + 10 - 10 = 0;$$

$$\bar{J}_2 = \frac{1}{6}[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]; \bar{J}_2 = 550.$$

Задача 1.8. Напряжённое состояние в некоторой точке задано тензором напряжений

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma & a\tau & b\sigma \\ a\tau & \sigma & c\sigma \\ b\sigma & c\sigma & \sigma \end{pmatrix},$$

где a, b, c – константы; σ – некоторое значение напряжения.

Определить константы a, b и c , при которых вектор полного напряжения на октаэдрической площадке становится равным нулю.

Решение. Величину полного напряжения находим по формуле

$$p_v^2 = X_v^2 + Y_v^2 + Z_v^2.$$

Эта величина будет равна нулю, если $X_v = 0, Y_v = 0, Z_v = 0$.

Тогда по формуле (1.3) при $l = m = n$ получим соотношения

$$X_v = \sigma \cdot l(1 + a + b) = 0;$$

$$Y_v = \sigma \cdot l(1 + a + c) = 0;$$

$$Z_v = \sigma \cdot l(1 + b + c) = 0.$$

Решив полученную систему уравнений, найдём

$$a = b = c = -1/2.$$

Задача 1.9. Напряжённое состояние в точке тела описывается тензором напряжений

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определить главные напряжения и главные оси тензора. Компоненты напряжений даны в Н/мм².

Решение. Уравнение (1.6) для определения главных напряжений будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} 3 - \sigma & 1 & 1 \\ 1 & -\sigma & 2 \\ 1 & 2 & -\sigma \end{vmatrix} = 0$$

или

$$(\sigma + 2)(\sigma - 4)(\sigma - 1) = 0,$$

т.е.

$$\sigma_1 = 4; \sigma_2 = 1; \sigma_3 = -2.$$

Положения главных осей определяли с помощью уравнений (1.9) и (1.10). Для первого главного напряжения σ_1 имеем

$$-l_1 + m_1 + n_1 = 0;$$

$$l_1 - 4m_1 + 2n_1 = 0;$$

$$l_1 + 2m_1 - 4n_1 = 0;$$

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1.$$

Отсюда находим

$$l_1 = -\frac{2}{\sqrt{6}}; m_1 = -\frac{1}{\sqrt{6}}; n_1 = -\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Для второго главного напряжения σ_2 имеем

$$2l_2 + m_2 + n_2 = 0; \quad l_2 - m_2 + 2n_2 = 0;$$

$$l_2 + 2m_2 - n_2 = 0; \quad l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1.$$

Решив эту систему, получим $l_2 = -m_2 = -n_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Для третьего главного напряжения σ_3 имеем

$$5l_3 + m_3 + n_3 = 0; \quad l_3 + 2m_3 + 2n_3 = 0;$$

$$l_3 + 2m_3 + 2n_3 = 0; \quad l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1.$$

Отсюда следует $l_3 = 0; m_3 = -n_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Задача 1.10. Определить главные напряжения и главные направления в случае плоского напряженного состояния в плоскости x, y .

Решение. Плоское напряжённое состояние определим по равенствам

$$\sigma_{zz} = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0; l_3 = m_3 = 0; n_3 = 1.$$

Уравнение (1.6) для нахождения главных напряжений принимает вид

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma \end{vmatrix} = 0.$$

Для определения главных значений тензора напряжений получаем квадратное уравнение

$$\sigma^2 - \sigma(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \sigma_{xx}\sigma_{yy} - \tau_{xy}^2 = 0.$$

Корни этого уравнения удобно представить в виде

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}.$$

Ориентацию главных направлений можно найти по соотношению

$$(\sigma_{xx} - \sigma_1)l_1 + \tau_{yx}m_1 = 0$$

или

$$(\sigma_{xx} - \sigma_1)\cos\alpha + \tau_{yx}\sin\alpha = 0,$$

т.е.

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_1}{\tau_{xy}}.$$

Задача 1.11. Определить главные напряжения и главные оси тензора напряжений

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \tau & \tau & \tau \\ \tau & \tau & \tau \\ \tau & \tau & \tau \end{pmatrix}.$$

Решение. Для определения главных напряжений уравнение (1.6) записываем в виде

$$\begin{vmatrix} \tau - \sigma & \tau & \tau \\ \tau & \tau - \sigma & \tau \\ \tau & \tau & \tau - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

или

$$(3\tau - \sigma)\sigma^2 = 0.$$

Отсюда

$$\sigma_1 = 3\tau; \sigma_2 = \sigma_3 = 0.$$

Для нахождения направляющих косинусов первого главного напряжения используем уравнения (1.9) и (1.10):

$$-2l_1 + m_1 + n_1 = 0; \quad l_1 - 2m_1 + n_1 = 0;$$

$$l_1 + m_1 - 2n_1 = 0; \quad l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1.$$

Решив эту систему, найдём

$$l_1 = m_1 = n_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Для нахождения направляющих косинусов второго и третьего направлений главных напряжений запишем уравнения (1.9) и (1.10) в виде

$$\begin{aligned}
l_2 + m_2 + n_2 &= 0; & l_3 + m_3 + n_3 &= 0; \\
l_2 + m_2 + n_2 &= 0; & l_3 + m_3 + n_3 &= 0; \\
l_2 + m_2 + n_2 &= 0; & l_3 + m_3 + n_3 &= 0; \\
l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 &= 1. & l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 &= 1.
\end{aligned}$$

Этих уравнений недостаточно для однозначного определения направления второй и третьей главных осей тензора напряжений. Таким образом, любое направление, лежащее в плоскости, перпендикулярной первой главной оси, будет главным направлением напряжений.

Задача 1.12. Показать, что второй инвариант девиатора напряжений выражается через главные значения девиатора следующим образом:

$$\bar{J}_2 = (S_1 S_2 + S_2 S_3 + S_3 S_1),$$

а также
$$\bar{J}_2 = -\frac{1}{2}(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2).$$

Решение. Запишем уравнение (1.6) применительно к девиатору напряжения для определения главных компонент девиатора в главных осях:

$$\begin{vmatrix}
S_1 - S & 0 & 0 \\
0 & S_2 - S & 0 \\
0 & 0 & S_3 - S
\end{vmatrix} = 0,$$

$$(S_1 - S)(S_2 - S)(S_3 - S) = 0;$$

$$S^3 + (S_1 S_2 + S_2 S_3 + S_3 S_1)S - S_1 S_2 S_3 = 0.$$

Отсюда следует

$$\bar{J}_2 = S_1 S_2 + S_2 S_3 + S_3 S_1.$$

Так как $S_1 + S_2 + S_3 = 0$, то предыдущее выражение перепишем в виде

$$\bar{J}_2 = \frac{1}{2}[2S_1 S_2 + 2S_2 S_3 + 2S_3 S_1 - (S_1 + S_2 + S_3)^2] = -\frac{1}{2}(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2).$$

Задача 1.13. Показать, что второй инвариант девиатора напряжений связан с октаэдрическим касательным напряжением соотношением

$$\tau_8 = \sqrt{-\frac{2}{3}\bar{J}_2}.$$

Решение. Для определения октаэдрического касательного напряжения используем выражение (1.11):

$$\tau_8 = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}.$$

Преобразуем его к виду

$$\begin{aligned}
\tau_8 &= \frac{1}{3}\sqrt{(S_1 - S_2)^2 + (S_2 - S_3)^2 + (S_3 - S_1)^2} = \\
&= \frac{1}{3}\sqrt{2(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) - 2(S_1 S_2 + S_2 S_3 + S_3 S_1)}.
\end{aligned}$$

Так как $S_1 + S_2 + S_3 = 0$, то $(S_1 + S_2 + S_3)^2 = 0$;

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = -2(S_1S_2 + S_2S_3 + S_3S_1).$$

Отсюда с учётом решения предыдущей задачи будем иметь

$$\tau_8 = \frac{1}{3} \sqrt{-6(S_1S_2 + S_2S_3 + S_3S_1)} = \sqrt{-\frac{2}{3} J_2}.$$

Задача 1.14. В некоторой точке тела задан тензор напряжений

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & \sigma_{yy} & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определить величину σ_{yy} , при которой вектор полного напряжения на некоторой площадке, проходящей через точку, обращался в нуль. Найти направляющие косинусы l, m, n нормали к этой площадке.

Решение. Так как $p_v = 0$, то $X_v = Y_v = Z_v = 0$. Для определения неизвестных согласно соотношениям (1.3) и (1.10), имеем

$$m + 2n = 0; \quad l + \sigma_{yy}m + n = 0;$$

$$2l + m = 0; \quad l^2 + m^2 + n^2 = 1.$$

Решив систему, получим

$$\sigma_{yy} = 1; \quad l = \frac{1}{\sqrt{6}}; \quad m = -\frac{2}{\sqrt{6}}; \quad n = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Задача 1.15. Поле напряжений в сплошной среде задано тензором

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} x^2y & (1-y^2)x & 0 \\ (1-y^2)x & \frac{y^3-3y}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2z^2 \end{pmatrix}.$$

Найти распределение массовых сил, если уравнения равновесия всюду удовлетворяются.

Решение. Используем дифференциальные уравнения равновесия (1.15):

$$2xy - 2yx + \rho X = 0;$$

$$1 - y^2 + y^2 - 1 + \rho Y = 0;$$

$$4z + \rho Z = 0.$$

Отсюда определим

$$X = 0; \quad Y = 0; \quad Z = -4z/\rho.$$

Задача 1.16. Напряжённое состояние в любой точке среды в декартовой системе координат задано тензором

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} 3xy & 5y^2 & 0 \\ 5y^2 & 0 & \frac{z^2}{2} \\ 0 & \frac{z^2}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Какой вид должны иметь компоненты массовых сил, если при данном распределении напряжений всюду выполняются уравнения равновесия?

Решение. Подставим в уравнение равновесия (1.15) компоненты напряжений. Тогда получим

$$3y + 10y + 0 + \rho X = 0;$$

$$0 + 0 + z + \rho Y = 0;$$

$$0 + 0 + 0 + \rho Z = 0.$$

Отсюда следует

$$X = -\frac{13y}{\rho}; Y = -\frac{z}{\rho}; Z = 0.$$

Задача 1.17. Напряжённое состояние в заданной точке тела определено тензором напряжений в главных осях напряжений. Установить величину максимального касательного напряжения и ориентацию площадки относительно главных осей напряжений, на которой оно действует.

Решение. Квадрат касательного напряжения на произвольно ориентированной площадке определяется по соотношению (1.5), которое в главных осях имеет вид

$$\tau_v^2 = \sigma_1^2(l^2 - l^4) + \sigma_2^2(m^2 - m^4) + \sigma_3^2(n^2 - n^4) - 2\sigma_1\sigma_2l^2m^2 - 2\sigma_2\sigma_3m^2n^2 - 2\sigma_1\sigma_3l^2n^2.$$

Определение τ_{\max} связано с отысканием экстремума предыдущего соотношения при условии

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1.$$

Применяя способ неопределённых множителей Лагранжа λ , получаем следующие условия экстремума:

$$\frac{\partial \tau_v^2}{\partial l} = \sigma_1^2(2l - 4l^3) - 4\sigma_1\sigma_2lm^2 - 4\sigma_1\sigma_3l \cdot n^2 + 2\lambda l = 0;$$

$$\frac{\partial \tau_v^2}{\partial m} = \sigma_2^2(2m - 4m^3) - 4\sigma_1\sigma_2l^2m - 4\sigma_2\sigma_3mn^2 + 2\lambda m = 0;$$

$$\frac{\partial \tau_v^2}{\partial n} = \sigma_3^2(2n - 4n^3) - 4\sigma_2\sigma_3m^2n - 4\sigma_1\sigma_3l^2n + 2\lambda n = 0.$$

Принимая во внимание выражение нормального напряжения на произвольной площадке (1.4) в главных осях

$$\sigma_v = \sigma_1l^2 + \sigma_2m^2 + \sigma_3n^2,$$

получаем

$$\begin{aligned} [\sigma_1(\sigma_1 - 2\sigma_v) + \lambda]l &= 0; \\ [\sigma_2(\sigma_2 - 2\sigma_v) + \lambda]m &= 0; \\ [\sigma_3(\sigma_3 - 2\sigma_v) + \lambda]n &= 0. \end{aligned}$$

Условия $l=m=0$ определяют площадку, нормаль к которой совпадает с третьим главным напряжением. Следовательно, касательное напряжение получим равным нулю. Этот случай интереса не представляет. Пусть $l \neq 0, m \neq 0$. Вычтем из первого выражения второе, тогда получим

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 - \sigma_2^2 - 2\sigma_v(\sigma_1 - \sigma_3) &= 0; \\ (\sigma_1 - \sigma_2)[(\sigma_1 + \sigma_2) - 2\sigma_v] &= 0. \end{aligned}$$

Если $\sigma_1 \neq \sigma_2$, то

$$\sigma_v = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}.$$

Поскольку

$$\sigma_v = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2,$$

то сравнение этих двух выражений даёт $l = m = \frac{1}{\sqrt{2}}; n = 0$. Эти направляющие

косинусы определяют площадку, параллельную третьему главному направлению и наклонённую к осям первого и второго главных направлений под углом 45° . После

этого можем найти τ_3 при $l = m = \frac{1}{\sqrt{2}}; \tau_3 = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$.

Рассматривая площадки, параллельные первому и второму главным направлениям, определяем

$$\tau_2 = \pm \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}; \quad \tau_1 = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}.$$

Если $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, то $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$.

Тема 2. Теория деформированного состояния

План

- 2.1. Основные соотношения теории малых деформаций
- 2.2. Примеры решения задач

2.1. Основные соотношения теории малых деформаций.

Деформированное состояние в точке тела списывается тензором деформаций

$$T_e = \begin{pmatrix} e_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & e_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & e_{zz} \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

где e_{xx}, e_{yy}, e_{zz} и $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ – линейные и угловые компоненты деформаций, которые вычисляются через перемещения в декартовой системе координат x, y, z по формулам

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}; & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}; \\ e_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y}; & \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}; \\ e_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}; & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

а в цилиндрической системе координат r, φ, z при осесимметричном деформировании по формулам

$$\left. \begin{aligned} e_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; & e_{\varphi\varphi} &= \frac{u_r}{r}; \\ e_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}; & \gamma_{rz} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}, \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

где $u_x, u_y, u_z, u_r, u_\varphi, u_z$ – компоненты перемещения в соответствующих системах координат.

Относительное удлинение материального волокна, положение которого до деформации определялось направляющими косинусами l, m, n , можно вычислить по формуле

$$e_p = e_{xx}l^2 + e_{yy}m^2 + e_{zz}n^2 + \gamma_{xy}lm + \gamma_{yz}mn + \gamma_{zx}nl. \quad (2.4)$$

Угол между двумя волокнами, положение которых до деформации определялось направляющими косинусами l_1, m_1, n_1 и l_2, m_2, n_2 , после деформации находят по формуле

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cos \Theta_{1,2}^1 = & (e_{xx}l_1l_2 + e_{yy}m_1m_2 + e_{zz}n_1n_2) + \frac{1}{2}\gamma_{xy}(l_1m_2 + l_2m_1) + \\ & + \frac{1}{2}\gamma_{yz}(m_1n_2 + m_2n_1) + \frac{1}{2}\gamma_{zx}(n_1l_2 + n_2l_1). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Компоненты деформаций удовлетворяют условиям неразрывности деформаций

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z \partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

С геометрической точки зрения эти соотношения являются условиями, определяющими деформацию, при которой тело остаётся сплошным. В точке деформируемого тела существуют взаимно перпендикулярные оси, для которых компоненты угловой деформации равны нулю. Эти оси называются главными осями деформаций. Материальные волокна, выбранные вдоль них, после деформации остаются взаимно перпендикулярными и имеют экстремальные удлинения.

Величины главных деформаций определяются кубическим уравнением

$$\begin{vmatrix} e_{xx} - e_k & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & e_{yy} - e_k & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & e_{zz} - e_k \end{vmatrix} = 0 \quad (2.7)$$

или

$$e_k^3 - J_1' e_k^2 - J_2' e_k - J_3' = 0, \quad (2.8)$$

$$\left. \begin{aligned} J_1' &= e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = 3e_{cp} = \Theta; \\ J_2' &= -e_{xx}e_{yy} - e_{yy}e_{zz} - e_{zz}e_{xx} + \frac{1}{4}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2); \\ J_3' &= \begin{vmatrix} e_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & e_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & e_{zz} \end{vmatrix} \end{aligned} \right\}. \quad (2.9)$$

где

называются алгебраическими инвариантами деформаций. (Здесь e_{cp}, Θ – средняя деформация и относительное изменение объёма элемента).

Ориентацию главных осей деформаций относительно системы координат x, y, z , определяемую направляющими косинусами l_k, m_k, n_k , находим, как и в теории напряжений, путём совместного решения двух независимых уравнений из системы типа (1.9), в которых компоненты тензора напряжений заменяются на компоненты тензора деформаций, и уравнения (1.10).

Важную роль в теории деформаций играют интенсивность деформации сдвига Γ , интенсивность линейных деформаций e_i , октаэдрическая угловая деформация γ_8 , которые определяются по соотношениям

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{2}{\sqrt{6}} \sqrt{(e_1 - e_2)^2 + (e_2 - e_3)^2 + (e_3 - e_1)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(e_{xx} - e_{yy})^2 + (e_{yy} - e_{zz})^2 + (e_{zz} - e_{xx})^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}, \\ e_i &= \frac{\Gamma}{\sqrt{3}}; \quad \gamma_8 = \sqrt{\frac{2}{3}}\Gamma. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Для кинематического описания процессов пластического формоизменения удобно использовать скорости течения, которые представляют собой приращения перемещений за бесконечно малый промежуток времени. В этом случае деформированное состояние среды можно описать с помощью симметричного тензора скорости деформации

$$T_i = \begin{pmatrix} \dot{e}_{xx} & \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{yx} & \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{zx} \\ \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{xy} & \dot{e}_{yy} & \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{zy} \\ \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{xz} & \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{yz} & \dot{e}_{zz} \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

где $\dot{e}_{xx}, \dot{e}_{yy}, \dot{e}_{zz}, \dot{\gamma}_{xy}, \dot{\gamma}_{yz}, \dot{\gamma}_{zx}$ – скорости относительных удлинений в направлениях координатных осей и скорости изменения первоначально прямых углов.

Приведённые соотношения для малых деформаций справедливы и для скоростей деформации, в которых вместо компонент тензора деформации нужно подставить компоненты тензора скорости деформации, а вместо перемещения – соответствующие компоненты скорости. По аналогии с понятиями главных деформаций, интенсивности деформации сдвига, интенсивности линейных деформаций, октаэдрической угловой деформации вводятся понятия главных скоростей деформаций e_1, e_2, e_3 , интенсивности скорости деформации сдвига $\Gamma = H$, скорости угловой деформации $\dot{\gamma}_8$:

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma} = H &= \frac{2}{\sqrt{6}} \sqrt{(\dot{e}_1 - \dot{e}_2)^2 + (\dot{e}_2 - \dot{e}_3)^2 + (\dot{e}_3 - \dot{e}_1)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\dot{e}_{xx} - \dot{e}_{yy})^2 + (\dot{e}_{yy} - \dot{e}_{zz})^2 + (\dot{e}_{zz} - \dot{e}_{xx})^2 + \frac{3}{2}(\dot{\gamma}_{xy}^2 + \dot{\gamma}_{yz}^2 + \dot{\gamma}_{zx}^2)}; \\ e_i &= \frac{H}{\sqrt{3}}; \quad \dot{\gamma}_8 = \sqrt{\frac{2}{3}} H. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Вид деформированного состояния часто оценивается параметром Лодэ-Надаи:

$$\mu_e = \frac{2e_2 - e_1 - e_3}{e_1 - e_3} \quad \text{или} \quad \mu_i = \frac{2\dot{e}_2 - \dot{e}_1 - \dot{e}_3}{\dot{e}_1 - \dot{e}_3}. \quad (2.13)$$

Если процесс пластического деформирования осуществляется монотонно, т.е. во время деформации параметр Лодэ-Надаи $\mu_e = const$ и главные оси деформаций совпадают с одними и теми же материальными волокнами, то при изучении больших пластических деформаций удобно использовать логарифмические главные деформации

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \ln(1 + e_1); \quad \varepsilon_2 = \ln(1 + e_2); \quad \varepsilon_3 = \ln(1 + e_3) \\ \text{или} \quad \varepsilon_1 &= \ln \frac{l_1}{l_{10}}; \quad \varepsilon_2 = \ln \frac{l_2}{l_{20}}; \quad \varepsilon_3 = \ln \frac{l_3}{l_{30}}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где l_{10}, l_{20}, l_{30} и l_1, l_2, l_3 – длины отрезков материальных волокон до деформации и после в направлениях главных осей.

При решении задач обработки металлов давлением принимают, что объём деформируемого материала постоянный. Это условие в случае малых деформаций записывается как

$$e_1 + e_2 + e_3 = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = 0, \quad (2.15)$$

в случае больших – либо через скорости деформации, либо в логарифмической форме:

$$\dot{e}_{xx} + \dot{e}_{yy} + \dot{e}_{zz} = \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 + \dot{\epsilon}_3 = 0; \quad (2.16)$$

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 0. \quad (2.17)$$

Если процесс пластического деформирования немонотонный, то значение интенсивности деформации сдвига определяется по формуле

$$\Gamma = \int_n \Gamma' d\lambda, \quad (2.18)$$

где Γ' – производная интенсивности деформации сдвига по параметру деформации λ .

При совпадении параметра λ со временем t $\Gamma' = H$. Для определения Γ' справедлива формула, аналогичная выражению (2.12).

2.1. Примеры решения задач

Задача 2.1. Поле перемещений в главной плоскости xu описывается уравнениями $u_x = 0,07x + 1; u_y = 0,05x^2 + 0,01y^2$.

Найти интенсивность малых деформаций в точке с координатами $x=1, y=1$.

Решение. Поскольку по условию задачи плоскость xu – главная, то компоненты тензора деформаций $\frac{1}{2}\gamma_{xz} = \frac{1}{2}\gamma_{yz} = 0$. Определим по формулам (2.2) остальные компоненты тензора деформаций:

$$e_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0,07; \quad e_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0,02y;$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = 0,05x.$$

Для определения компоненты тензора деформации e_{zz} воспользуемся условием несжимаемости (2.15):

$$e_{zz} = -(e_{xx} + e_{yy}) = -0,07 - 0,02y.$$

Следовательно, деформированное состояние в точке с координатами $x=1, y=1$ описывается тензором малых деформаций

$$T_e = \begin{pmatrix} 0,07 & 0,05 & 0 \\ 0,05 & 0,02 & 0 \\ 0 & 0 & -0,09 \end{pmatrix}.$$

Интенсивность деформации сдвига определим по формуле (2.10):

$$\Gamma = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(e_{xx} - e_{yy})^2 + (e_{yy} - e_{zz})^2 + (e_{zz} - e_{xx})^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)};$$

$$\Gamma = 0,191.$$

Интенсивность линейных деформаций находим из выражения

$$e_i = \frac{\Gamma}{\sqrt{3}}; \quad e_i = 0,110.$$

Задача 2.2. Тонкостенная труба подвержена кручению на малый угол γ . В результате анализа деформации квадратной сетки, предварительно нанесённой на поверхность трубы, в пределах элементарной ячейки установлено поле перемещений

$$u_x = y \cdot \operatorname{tg}\gamma; \quad u_y = 0.$$

Найти компоненты тензора малых деформаций и интенсивность деформации сдвига.

Решение. Определим компоненты тензора малой деформации по формулам (2.12) и условию несжимаемости (2.15):

$$e_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0; \quad e_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0; \quad \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\gamma;$$

$$e_{zz} = -(e_{xx} + e_{yy}) = 0; \quad \frac{1}{2}\gamma_{yz} = \frac{1}{2}\gamma_{zx} = 0.$$

По формуле (2.10) находим

$$\Gamma = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(e_{xx} - e_{yy})^2 + (e_{yy} - e_{zz})^2 + (e_{zz} - e_{xx})^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)} = \operatorname{tg}\gamma.$$

Заметим, что полученное выражение для интенсивности деформации сдвига остаётся справедливым и при значительных углах γ , если деформирование осуществлялось в условиях простого сдвига. При малых углах γ можно положить $\operatorname{tg}\gamma = \gamma$.

Задача 2.3. Деформированное состояние в точке тела характеризуется тензором малых деформаций, компоненты которого определены в декартовой системе координат:

$$T_e = \begin{pmatrix} 0,03 & 0,01 & 0 \\ 0,01 & -0,02 & 0 \\ 0 & 0 & -0,01 \end{pmatrix}.$$

Определить величины главных деформаций, направления главных осей, интенсивность линейных и сдвиговых деформаций, вид деформированного состояния, величины октаэдрических деформаций.

Решение. По виду тензора деформаций определяем, что компонента $e_{zz} = -0,01$ является главной, так как $\gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$. Величины двух других компонент находятся из уравнения (2.8):

$$\begin{vmatrix} 0,03 - e_k & 0,01 & 0 \\ 0,01 & -0,02 - e_k & 0 \\ 0 & 0 & -0,01 - e_k \end{vmatrix} = 0$$

или $-(e_k + 0,01) \begin{vmatrix} 0,03 - e_k & 0,01 \\ 0,01 & -0,02 - e_k \end{vmatrix} = 0.$

Раскрывая определитель, получаем

$$\begin{aligned} (0,03 - e_k) \cdot (-0,02 - e_k) - 0,0001 &= 0; \\ e_k^2 - 0,01e_k - 0,0007 &= 0; \\ e_k &= 0,005 \pm 0,0269. \end{aligned}$$

Отсюда $e_1 = 0,0319$; $e_2 = -0,01$; $e_3 = -0,0219$.

Для определения положения главных осей необходимо воспользоваться уравнениями типа (1.9), причём следует принять во внимание, что компонента деформации $e_{zz} = e_2$ является главной, и поэтому

$$l_2 = m_2 = 0; \quad n_2 = 1; \quad n_1 = n_3 = 0.$$

Направление первой оси главных деформаций находится из системы уравнений

$$\begin{aligned} -0,0019l_1 + 0,01m_1 &= 0; \\ 0,01l_1 - 0,0519m_1 &= 0; \\ l_1^2 + m_1^2 &= 1. \end{aligned}$$

Отметим, что первые два уравнения системы линейно зависимы. Решая любое из первых двух совместно с третьим уравнением, получаем

$$l_1 = 0,9820; \quad m_1 = 0,1891;$$

$$\angle(1, x) = 10^\circ 54'; \quad \angle(1, y) = 79^\circ 06'; \quad \angle(1, z) = 90^\circ.$$

Направление третьей главной оси деформаций определим из уравнений

$$0,0519l_3 + 0,01m_3 = 0; \quad 0,01l_3 + 0,0019m_3 = 0; \quad l_3^2 + m_3^2 = 1; \quad e_2 = 0,1891;$$

$$m_3 = -0,9820; \quad \angle(3, x) = 79^\circ 06'; \quad \angle(3, y) = -10^\circ 54'; \quad \angle(3, z) = 90^\circ.$$

Для второй главной оси имеем

$$\angle(2, x) = 90^\circ; \quad \angle(2, y) = 90^\circ; \quad \angle(2, z) = 0.$$

Интенсивность линейных и сдвиговых деформаций найдём по соотношениям (2.10):

$$\Gamma = 0,0563; \quad e_i = 0,0326.$$

Вид деформированного состояния определяется параметром Лодэ-Надаи (2.13):

$$\mu_e = \frac{2e_2 - e_1 - e_3}{e_1 - e_3}; \quad \mu_e = -0,5571.$$

Найдём величины линейной и угловой деформаций на октаэдрической площадке. Для этого воспользуемся формулами (2.4) и (2.10), принимая во внимание, что $l_8 = m_8 = n_8 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $e_8 = \frac{1}{3}(e_1 + e_2 + e_3) = 0$ согласно условию несжимаемости материала при пластической деформации:

$$\frac{1}{2}\gamma_8 = 0,0231.$$

Задача 2.4. В точке тела заданы компоненты деформации $e_{xx}, e_{yy}, \gamma_{xy}$, а остальные компоненты равны нулю ($e_{zz} = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$) – случай плоской деформации. Получить формулы для определения главных деформаций и найти инварианты тензора деформаций.

Решение. Деформированное состояние в точке тела определяется тензором

$$T_e = \begin{pmatrix} e_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & e_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

По структуре тензора определяем, что ось z главная и один из корней кубического уравнения (2.7) $e_2 = 0$. Два других корня найдём из выражения

$$\begin{vmatrix} e_{xx} - e_\kappa & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & e_{yy} - e_\kappa \end{vmatrix} = e_\kappa^2 - (e_{xx} + e_{yy})e_\kappa + e_{xx}e_{yy} - \frac{1}{4}\gamma_{xy}^2 = 0;$$

$$e_{1,3} = \frac{e_{xx} + e_{yy}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(e_{xx} - e_{yy})^2 + \gamma_{xy}^2}.$$

Если деформация пластическая, то первый член предыдущего выражения равен нулю. Инварианты тензора деформаций вычисляются по формулам (2.9):

$$J'_1 = e_{xx} + e_{yy}; \quad J'_2 = -e_{xx}e_{yy} + \frac{1}{4}\gamma_{xy}^2; \quad J'_3 = 0.$$

Задача 2.5. Для определения компонентов деформации некоторого тела даны следующие выражения:

$$e_{xx} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad e_{yy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \gamma_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y};$$

$$e_{zz} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0; \quad \varphi = \varphi(x, y).$$

Выяснить, можно ли функцию φ считать произвольной функцией x, y или же уравнения неразрывности деформаций налагают на неё некоторые ограничения и, если налагают, то какие именно ограничения.

Решение. Все уравнения неразрывности деформаций (2.6), кроме первого, тождественно удовлетворяются согласно условиям задачи $e_{zz} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$; $\varphi = \varphi(x, y)$.

После подстановки

$$e_{xx} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad e_{yy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \gamma_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$$

в первое уравнение неразрывности получим условие, которому должна удовлетворять функция

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0.$$

Задача 2.6. Поле скоростей перемещений точек деформируемого тела определяется уравнениями

$$v_x = 0,1x - y^2 + 3z^3; \quad v_y = 4x^3 + 0,3y + z^2; \quad v_z = x^2 + 3,6y^3 - 0,4z.$$

Удовлетворяет ли это поле скоростей условию несжимаемости материала?

Решение. Условие несжимаемости материала записывается через скорости деформаций по соотношению (2.16):

$$\dot{e}_{xx} + \dot{e}_{yy} + \dot{e}_{zz} = 0.$$

Найдём входящие в это выражение компоненты скоростей деформаций по формулам, аналогичным (2.2):

$$\dot{e}_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0,1; \quad \dot{e}_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0,3; \quad \dot{e}_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z} = -0,4.$$

Отсюда видно, что условие несжимаемости материала удовлетворяется.

Задача 2.7. Задано поле скоростей перемещений точек деформируемого тела в главной плоскости:

$$v_x = \frac{V}{h} x \left(1 + \frac{yx}{h^2} \right); \quad v_y = \frac{V}{h} y \left(1 - \frac{x^2}{h^2} \right).$$

Найти интенсивность линейных и сдвиговых деформаций в точке с координатами $x=0,5h$; $y=h$.

Решение. По условию задачи поле скоростей перемещений определено в главной плоскости, поэтому $\frac{1}{2} \dot{\gamma}_{xz} = \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{yz} = 0$.

Компоненты тензора скоростей деформации $\dot{e}_{xx}, \dot{e}_{yy}, \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{xy}$ находим по соотношениям

$$\dot{e}_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{V}{h} \left(1 + 2 \frac{xy}{h^2} \right); \quad \dot{e}_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{V}{h} \left(1 - \frac{x^2}{h^2} \right);$$

$$\frac{1}{2} \dot{\gamma}_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \frac{V}{h^3} x(x - 2y).$$

При $x=0,5$, $y=h$ имеем

$$\dot{e}_{xx} = 2 \frac{V}{h}; \quad \dot{e}_{yy} = 0,75 \frac{V}{h}; \quad \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{xy} = -0,375 \frac{V}{h}.$$

Третью линейную компоненту деформации найдём из условия несжимаемости:

$$e_{zz} = -(\dot{e}_{xx} + \dot{e}_{yy}) = -2,75 \frac{V}{h}.$$

Интенсивность линейных и сдвиговых скоростей деформации определим по формулам (2.12):

$$H = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[(\dot{e}_{xx} - \dot{e}_{yy})^2 + (\dot{e}_{yy} - \dot{e}_{zz})^2 + (\dot{e}_{zz} - \dot{e}_{xx})^2 + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \right]^{1/2} = 4,96 \frac{V}{h};$$

$$e_i = \frac{H}{\sqrt{3}} = 2,867 \frac{V}{h}.$$

Задача 2.8. Экспериментально установленное поле скоростей перемещений точек в меридиональном сечении деформируемого осесимметричного образца описывается уравнениями

$$v_r = (A + Br)z; \quad v_z = Dr^2 + Cz.$$

Найти компоненты тензора скоростей деформаций в точке с координатами $r=2, z=1$.

Решение. Для определения компонент тензора скоростей деформаций воспользуемся соотношениями типа (2.2) с заменой в них компонент деформаций и перемещений соответственно компонентами скоростей деформаций и скоростей течения:

$$\dot{e}_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r} = Bz; \quad \dot{e}_{\varphi\varphi} = \frac{v_r}{r} = A \frac{z}{r} + Bz; \quad \dot{e}_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z} = C;$$

$$\frac{1}{2} \dot{\gamma}_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = \frac{1}{2} [A + r(B + 2D)].$$

При $r=2, z=1$ имеем

$$\dot{e}_{rr} = B; \quad \dot{e}_{\varphi\varphi} = 0,5A + B; \quad \dot{e}_{zz} = C; \quad \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{rz} = 0,5A + B + 2D.$$

Следует заметить, что при пластической деформации согласно условию несжимаемости материала между коэффициентами существует связь:

$$0,5A + 2B + C = 0.$$

Задача 2.9. Круг диаметром d_0 , нанесённый в плоскости симметрии деформируемого тела, в результате монотонного процесса деформирования превратился в эллипс, главные диаметры которого $2a = 4d_0$; $2b = 0,25d_0$. Определить величины главных конечных деформаций и интенсивность деформации сдвига.

Решение. Так как плоскость симметрии является одной из главных плоскостей, то две главные логарифмические деформации в плоскости симметрии определяются по изменению размеров круга:

$$\varepsilon_1 = \ln \frac{2a}{d_0} = \ln 4 = 1,386; \quad \varepsilon_2 = \ln \frac{2b}{d_0} = \ln 0,25 = -1,386.$$

Третью главную логарифмическую деформацию устанавливаем из условия несжимаемости (2.17):

$$\varepsilon_3 = -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = 0.$$

Интенсивность деформации сдвига найдём по выражению (2.10), записанному с учётом условия несжимаемости

$$\Gamma = 2\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2}; \quad \Gamma = 2,772.$$

Задача 2.10. За счёт растяжения стержень получил относительное удлинение $e_1 = 0,2$. Вырезанный из стержня образец осаживался до относительного изменения высот, равной 0,5. Определить интенсивность деформации сдвига, которая соответствует конечному деформированному состоянию. Как изменится эта величина, если образец осаживать в условиях плоской деформации?

Решение. Значение накопленной интенсивности деформаций сдвига складывается из двух величин, полученных при растяжении стержня и осаживании образца.

При растяжении образца на первом этапе деформирования интенсивность линейных логарифмических деформаций равна логарифмической деформации удлинения:

$$\varepsilon_{iI} = \varepsilon_1 = \ln(1 + e_1) = \ln 1,2 = 0,182.$$

Интенсивность деформации сдвига

$$\Gamma_I = \sqrt{3}\varepsilon_{iI} = 0,315.$$

Интенсивность логарифмических линейных деформаций при осадке образца найдём по формуле

$$\varepsilon_{iII} = -\varepsilon_3 \text{ или } \varepsilon_{iII} = -\ln(1 + e_3) = -\ln 0,5 = 0,693.$$

Интенсивность деформации сдвига найдём по выражению

$$\Gamma_{II} = \sqrt{3}\varepsilon_{iII} = 1,199.$$

Накопленная за два этапа деформирования интенсивность деформаций сдвига

$$\Gamma_{\text{сум}} = \Gamma_I + \Gamma_{II} = 1,514.$$

Если операция осадки образца выполнялась в условиях плоской деформации, то

$$\varepsilon_2 = 0; \quad \varepsilon_1 = -\varepsilon_3 = 0,693; \quad \Gamma_{II} = 2\varepsilon_1 = 1,386,$$

т.е. интенсивность деформации сдвига при осадке в условиях плоской деформации превосходит интенсивность деформации сдвига при обычной осадке в 1,155 раза.

Суммарная интенсивность деформаций сдвига при осуществлении второго этапа деформирования по схеме плоской деформации

$$\Gamma_{\text{сум}} = \Gamma_I + \Gamma_{II} = 1,701.$$

Задача 2.11. Тонкостенная труба получила деформацию кручения на углу $\gamma = 45^\circ$. Образец, вырезанный из стенки трубы после закручивания, растягивался с относительным удлинением на 20%. Определить суммарную интенсивность деформации сдвига.

Решение. На первом этапе деформирования в условиях простого сдвига интенсивность деформации сдвига

$$\Gamma_I = \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} 45^\circ = 1 \text{ (см. замечание к задаче 2.2).}$$

На втором этапе интенсивность деформации

$$\Gamma_{II} = \sqrt{3}\varepsilon_{i_{II}} = \sqrt{3}\varepsilon_1 = \sqrt{3} \ln(1 + e_1) = \sqrt{3} \ln 1,2 = 0,315.$$

Суммарная накопленная интенсивность деформации сдвига

$$\Gamma = \Gamma_I + \Gamma_{II} = 1,315.$$

Тема 3. Теория пластичности

План

- 3.1. Основные соотношения теории пластичности
- 3.2. Примеры решения задач

3.1. Основные соотношения теории пластичности

Условие перехода из упругого состояния материала в пластическое называется условием текучести (пластичности). Наибольшее распространение в расчётах пластического формоизменения при обработке металлов давлением получили *условия текучести (пластичности) Губера – Мизеса и Треска – Сен-Венана*.

По условию текучести Губера – Мизеса пластическое состояние наступает и поддерживается в любой точке тела в том случае, если интенсивность нормальных напряжений σ_i в этой точке достигает величины напряжения текучести σ_s при линейном напряжённом состоянии:

$$\sigma_i = \sigma_s. \quad (3.1)$$

Это условие текучести в декартовой системе координат имеет вид

$$(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) = 2\sigma_s^2, \quad (3.2)$$

а в главных осях запишется как

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_s^2. \quad (3.3)$$

По условию текучести Треска – Сен-Венана пластическое состояние в каждой точке тела наступает в том случае, когда максимальное касательное напряжение в этой точке достигнет величины, равной половине предела текучести при растяжении. Если $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, то это условие текучести записывается в виде

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_s. \quad (3.4)$$

В пластической области при малых деформациях физические уравнения связи между напряжениями и деформациями описываются *уравнениями Гука – Генки*:

$$\begin{aligned} \frac{e_{xx}}{\sigma_{xx} - \sigma_{cp}} = \frac{e_{yy}}{\sigma_{yy} - \sigma_{cp}} = \frac{e_{zz}}{\sigma_{zz} - \sigma_{cp}} = \frac{\frac{1}{2}\gamma_{xy}}{\tau_{xy}} = \frac{\frac{1}{2}\gamma_{yz}}{\tau_{yz}} = \frac{\frac{1}{2}\gamma_{zx}}{\tau_{zx}} = \\ = \psi = \frac{\Gamma}{2T} = \frac{3}{2} \cdot \frac{e_i}{\sigma_i}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Для конечных деформаций *уравнения Гука – Генки* могут использовать при условии монотонного деформирования. При этом их следует записать в главных осях деформаций, т.е.

$$\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1 - \sigma_{cp}} = \frac{\varepsilon_2}{\sigma_2 - \sigma_{cp}} = \frac{\varepsilon_3}{\sigma_3 - \sigma_{cp}} = \psi = \frac{\Gamma}{2T} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}, \quad (3.6)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – главные логарифмические деформации; Γ, ε_i – интенсивности логарифмических деформаций сдвига и линейных деформаций.

При конечных деформациях и немонотонном деформировании целесообразно пользоваться физическими уравнениями теории течения. Наибольшее распространение при анализе пластического формоизменения получили **уравнения теории пластичности Сен-Венана – Мизеса – Леви**:

$$\frac{\dot{e}_{xx}}{\sigma_{xx} - \sigma_{cp}} = \frac{\dot{e}_{yy}}{\sigma_{yy} - \sigma_{cp}} = \frac{\dot{e}_{zz}}{\sigma_{zz} - \sigma_{cp}} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\gamma}_{xy}}{\tau_{xy}} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\gamma}_{yz}}{\tau_{yz}} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\gamma}_{zx}}{\tau_{zx}} =$$

$$= \dot{\lambda} = \frac{H}{2T} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\dot{e}_i}{\sigma_i} = \frac{N_p}{2T^2}, \quad (3.7)$$

где N_p – мощность пластической деформации;

$$N_p = \sigma_{xx}\dot{e}_{xx} + \sigma_{yy}\dot{e}_{yy} + \sigma_{zz}\dot{e}_{zz} + \tau_{xy}\dot{\gamma}_{xy} + \tau_{yz}\dot{\gamma}_{yz} + \tau_{zx}\dot{\gamma}_{zx} = \sigma_i \dot{e}_i. \quad (3.8)$$

Эти уравнения можно записать сокращённо:

$$de_{ij} = d\lambda S_{ij}; \quad d\lambda = \frac{d\Gamma}{2T} = \frac{3}{2} \cdot \frac{de_i}{\sigma_i} = \frac{dA_p}{2T^2}; \quad (3.9)$$

$$dA_p = \sigma_{ij} de_{ij}, \quad (3.10)$$

где dA_p – приращение работы пластической деформации.

Материалы, подвергаемые обработке давлением, в зависимости от температуры, скорости и степени деформации проявляют различные свойства. Эти свойства в теориях пластичности описываются уравнением состояния

$$\sigma_i = \sigma_i(e_i, \dot{e}_i, T), \quad (3.11)$$

в которых вид функции выбирается с использованием экспериментальных данных о поведении материала из простейших опытов на растяжение и сжатие образцов к принятой идеализированной модели тела.

3.2. Примеры решения задач

Задача 3.1. В некоторой точке сплошной среды, подчиняющейся **условию текучести (пластичности) Губера – Мизеса**, тензор напряжений задан выражением

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,4 & 0 \\ -0,4 & 0,2 & 0,6 \\ 0 & 0,6 & -0,3 \end{pmatrix} \aleph \sigma_s (\aleph > 0).$$

Чему равно \aleph , если известно, что в рассматриваемой точке имеет место пластическое состояние?

Решение. По **условию текучести (пластичности) Губера – Мизеса** (3.2) пластическое состояние наступает и поддерживается в том случае, когда интенсивность напряжений σ_i достигает напряжения текучести при линейном напряжённом состоянии σ_s . Поэтому интенсивность напряжений вычисляем по формуле (1.11):

$$\begin{aligned}\sigma_i &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} = \\ &= \frac{\aleph \sigma_s}{\sqrt{2}} \sqrt{(0,5 - 0,2)^2 + (0,2 + 0,3)^2 + (-0,3 - 0,5)^2 + \dots} \\ &\quad 6[(-0,4)^2 + 0^2 + 0,6^2] = 1,43 \aleph \sigma_s.\end{aligned}$$

Подставляя σ_i в условие текучести (пластичности) и решая получившееся уравнение относительно \aleph , получаем

$$\aleph = \frac{1}{1,43} = 0,7.$$

Задача 3.2. В некоторой точке сплошной среды, подчиняющейся *условию текучести (пластичности) Треска – Сен-Венана*, тензор напряжений задан выражением

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \aleph \sigma_s \quad (\aleph > 0).$$

Компоненты напряжений заданы в Н/мм². Чему равно \aleph , если известно, что в рассматриваемой точке имеет место пластическое состояние?

Решение. *Условие текучести (пластичности) Треска – Сен-Венана* (3.4) записывается в главных напряжениях следующим образом:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_s.$$

Поэтому сначала необходимо вычислить величины главных напряжений. Для их определения имеем кубическое уравнение (1.6):

$$\sigma_K^3 - J_1 \sigma_K^2 - J_2 \sigma_K - J_3 = 0.$$

Находим инварианты

$$\begin{aligned}J_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = (3 + 0 + 0) \aleph \sigma_s = 3 \aleph \sigma_s ; \\ J_2 &= -\sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 = \\ &= ((-3 \cdot 0 - 0 \cdot 0 - 0 \cdot 3) + 1^2 + 2^2 + 1^2) \aleph^2 \sigma_s^2 = 6 \aleph^2 \sigma_s^2 ; \\ J_3 &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2 \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 = \\ &= (3 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 - 0 \cdot 1^2 - 3 \cdot 2^2 - 0 \cdot 1^2) \aleph^3 \sigma_s^3 = -8 \aleph^3 \sigma_s^3.\end{aligned}$$

Составляем кубическое уравнение

$$\sigma_K^3 - 3 \aleph \sigma_s \sigma_K^2 - 6 \aleph^2 \sigma_s^2 \sigma_K + 8 \aleph^3 \sigma_s^3 = 0$$

и вычисляем его корни:

$$\sigma_1 = 4 \aleph \sigma_s ; \quad \sigma_2 = \aleph \sigma_s ; \quad \sigma_3 = -2 \aleph \sigma_s.$$

Внося полученные значения σ_1 и σ_2 в условие текучести (пластичности) Треска – Сен-Венана и разрешая получившееся уравнение относительно \aleph , получаем $\aleph=1/6$.

Задача 3.3. В точках А и В однородной сплошной среды, подчиняющейся условию текучести (пластичности) Губера – Мизеса, возникло пластическое состояние.

Тензоры напряжений в этих точках заданы выражением

$$(T_{\sigma})_A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}; \quad (T_{\sigma})_B = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Компоненты напряжений заданы в Н/мм². Чему равно σ_x , если известно, что σ_x – первое главное напряжение? Среду считать идеально пластической.

Решение. В случае однородной среды предел текучести в любой точке один и тот же. Поэтому одинаковы и интенсивности напряжений.

Вычислим σ_i в точках А и В:

в точке А

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(6-6)^2 + (6-8)^2 + (8-6)^2 + 6(-3)^2} = \sqrt{31};$$

в точке В

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - 3)^2 + (3 + 2)^2 + (-2 - \sigma_x)^2} = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x + 19}.$$

Приравнивая подкоренные выражения, получаем квадратное уравнение относительно σ_x :

$$\sigma_x^2 - \sigma_x - 12 = 0.$$

Его корни $\sigma_{x1} = 4$; $\sigma_{x2} = -3$.

Так как по условию σ_x – первое главное напряжение, окончательно имеем $\sigma_x = 4$.

Задача 3.4. Используя данные задачи 3.3, найти σ_x при условии, что в точке коэффициент Лодэ – Надаи μ_{σ} отрицателен.

Решение. Коэффициент Лода – Надаи, характеризующий вид напряжённого состояния, определяется по формуле

$$\mu_{\sigma} = 2 \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} - 1.$$

Рассмотрим напряжённые состояния, соответствующие корням квадратного уравнения:

если $\sigma_x = 4$, то $\sigma_1 = 4$; $\sigma_2 = 3$; $\sigma_3 = -2$; $\mu_{\sigma} = 2 \frac{3+2}{4+2} - 1 = \frac{2}{3} > 0$;

если $\sigma_x = -3$, то $\sigma_1 = 3; \sigma_2 = -2; \sigma_3 = -3; \mu_\sigma = 2 \frac{-2+3}{3+3} - 1 = -\frac{2}{3} < 0$.

Таким образом, при условии $\mu_\sigma < 0$ следует принять $\sigma_3 = -3$.

Задача 3.5. В некоторый момент процесса нагружения сплошной среды напряжённые состояния в точках А и В характеризовались тензором напряжений

$$(T_\sigma)_A = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}; \quad (T_\sigma)_B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Компоненты напряжений заданы в $H / мм^2$.

При дальнейшем нагружении все напряжения возрастали пропорционально одному параметру (например, времени). В какой из двух точек раньше возникло пластическое состояние, если среда идеально пластическая и подчиняется **условию текучести (пластичности) Треска – Сен-Венана?**

Решение. Согласно **условию пластичности Треска – Сен-Венана** пластическое состояние наступает, если $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_s$.

Поэтому при пропорциональном возрастании всех напряжений пластическое состояние возникает раньше в той точке, в которой разность первого и третьего главных напряжений будет наибольшей.

В точке А имеем

$$\sigma_1 = -9; \sigma_3 = -12; \sigma_1 - \sigma_3 = -9 + 12 = 3.$$

В точке В соответственно

$$\sigma_1 = 4; \sigma_3 = -3; \sigma_1 - \sigma_3 = 4 + 3 = 7.$$

Как видно,

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_B > (\sigma_1 - \sigma_3)_A,$$

т.е. пластическое состояние возникает раньше в точке В.

Задача 3.6. Напряжённое состояние в некоторой точке сплошной среды определяется тензором напряжений

$$T_\sigma = 0,1\sigma_s \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Среда испытывает такое нагружение, при котором первое главное напряжение σ_1 возрастает, а два других главных напряжения не изменяются. Считая среду подчиняющейся **условию текучести (пластичности) Губера – Мизеса**, найти, во сколько раз должно увеличиваться напряжение σ_1 , чтобы в рассматриваемой точке возникло пластическое состояние?

Решение. Находим главные напряжения.

Поскольку $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, то одно из главных напряжений известно: $\sigma_z = 0,1\sigma_s \cdot 8 = 0,8\sigma_s$. Два других определяются по тензору напряжений

$$T_{\sigma} = 0,1\sigma_s \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Вычислим его инварианты:

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y = 0,1\sigma_s(6 + 6) = 1,2\sigma_s;$$

$$J_2 = -\sigma_x\sigma_y + \tau_{xy}^2 = 0,1^2\sigma_s^2[-6 \cdot 6 + (-3)^2] = -0,27\sigma_s^2.$$

Составляем квадратное уравнение относительно главных напряжений:

$$\sigma^2 - J_1\sigma - J_2 = 0$$

или
$$\sigma^2 - 1,2\sigma_s\sigma + 0,27\sigma_s^2 = 0.$$

Корни этого уравнения $0,9\sigma_s$ и $0,3\sigma_s$.

Таким образом,

$$\sigma_1 = 0,9\sigma_s; \quad \sigma_2 = 0,8\sigma_s; \quad \sigma_3 = 0,3\sigma_s.$$

По условию задачи в процессе нагружения напряжения σ_2 и σ_3 не изменяются, а напряжение σ_1 возрастает. Запишем условие текучести (пластичности), обозначив $\sigma_1 = \aleph\sigma_s$:

$$\frac{\sigma_s}{\sqrt{2}} \sqrt{(\aleph - 0,8)^2 + (0,8 - 0,3)^2 + (\aleph - 0,3)^2} = \sigma_s.$$

Отсюда получаем квадратное уравнение относительно \aleph :

$$\aleph^2 - 1,1\aleph - 0,51 = 0.$$

Его корни равны 1,45 и $-0,35$. Так как по условию напряжение σ_1 возрастает, следует принять $\sigma_1 = 1,45\sigma_s$.

И так, чтобы в рассматриваемой точке наступило пластическое состояние, напряжение σ_1 должно возрасти в

$$\frac{1,45}{0,9} = 1,61 \text{ раза.}$$

Задача 3.7. Первоначально напряжённое состояние в точке сплошной среды характеризовалось тензором напряжений

$$(T_{\sigma})_0 = 0,2\sigma_s \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Затем в процессе нагружения тензор $(T_{\sigma})_0$ изменился на величину

$$T_{\sigma}^* = 0,1\sigma_s \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}$$

и в рассматриваемой точке возникло пластическое состояние.

Найти a , полагая, что среда подчиняется *условию текучести Треска – Сен-Венана*.

Решение. Находим сумму тензоров $(T_\sigma)_0$ и T_σ^* :

$$T_\sigma = \sigma_s \begin{pmatrix} 0,4 + 0,1a & 0 & 0 \\ 0 & -0,2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 - 0,1a \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим два случая: когда $a > -1$ и когда $a < -1$.

Если $a > -1$, то $\sigma_1 = (0,4 + 0,1a)\sigma_s$.

Если $a \leq 4$, то $0,2 - 0,1a \geq -0,2$, т.е. $\sigma_2 = (0,2 - 0,1a)\sigma_s$, $\sigma_3 = -0,2\sigma_s$.

Из условия текучести $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_s$ находим

$$0,4 + 0,1a + 0,2 = 1, \quad a = 4.$$

Если $a \geq 4$, то $\sigma_2 = -0,2\sigma_s$, $\sigma_3 = (0,2 - 0,1a)\sigma_s$,

По условию текучести

$$0,4 + 0,1a - 0,2 + 0,1a = 1.$$

Отсюда $a = 4$.

Пусть $a \leq -1$. В этом случае

$$0,2 - 0,1a \geq 0,4 + 0,1a,$$

т.е. $\sigma_1 = (0,2 - 0,1a)\sigma_s$; $\sigma_2 = (0,4 + 0,1a)\sigma_s$; $\sigma_3 = -0,2\sigma_s$

или $\sigma_1 = (0,2 - 0,1a)\sigma_s$; $\sigma_2 = -0,2\sigma_s$; $\sigma_3 = (0,4 + 0,1a)\sigma_s$.

По условию текучести имеем:

в первом случае $0,2 - 0,1a + 0,2 = 1,$

во втором случае $0,2 - 0,1a - 0,4 - 0,1a = 1.$

Отсюда (в обоих случаях) находим

$$a = -6.$$

Нетрудно заметить, что, несмотря на два значения a , получено единственное решение задачи, поскольку компоненты тензора напряжений при $a = 4$ преобразуются в компоненты тензора при $a = -6$ поворотом осей x и z на 90° вокруг неподвижной оси y :

$$(T_\sigma)_{a=4} = \sigma_s \begin{pmatrix} 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & -0,2 & 0 \\ 0 & 0 & -0,2 \end{pmatrix};$$

$$(T_\sigma)_{a=-6} = \sigma_s \begin{pmatrix} -0,2 & 0 & 0 \\ 0 & -0,2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Задача 3.8. При испытании тонкостенной трубы на растяжение с одновременным кручением реализуется напряжённое состояние, которое в цилиндрической системе координат представлено напряжениями $\sigma_{zz} = \sigma$, $\tau_{z\Theta} = \tau$, $\sigma_{rr} = \sigma_{\Theta\Theta} = \tau_{r\Theta} = \tau_{rz} = 0$. Получить кривые текучести в плоскости σ, τ в соответствии с критериями Треска – Сен-Венана и Губера – Мизеса.

Решение. Напряжённое состояние описывается тензором напряжений

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & \sigma \end{pmatrix}.$$

По структуре тензора ясно, что направление r является главным и $\sigma_{rr} = 0$ – величиной одного из главных напряжений.

Величины двух других напряжений найдём путём решения квадратного уравнения – $\sigma_{\kappa}(\sigma - \sigma_{\kappa}) - \tau^2 = 0$; $\sigma_{\kappa}^2 - \sigma\sigma_{\kappa} - \tau^2 = 0$, отсюда

$$\sigma_1 = \frac{\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2}; \quad \sigma_3 = \frac{\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2}.$$

Таким образом, по условию Треска – Сен-Венана (3.4) имеем

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sigma_s \quad \text{или} \quad \sigma^2 + 4\tau^2 = \sigma_s^2.$$

Это уравнение эллипса в плоскости σ, τ .

Непосредственное использование *условия текучести Губера – Мизеса* (3.3) даёт

$$\sigma^2 + 3\tau^2 = \sigma_s^2.$$

Это также уравнение эллипса в плоскости σ, τ .

Заметим, что наибольшее различие перечисленных условий будет при $\sigma = 0$. В первом случае $\tau = 0,5\sigma_s$, во втором $\tau = 0,57\sigma_s$.

Задача 3.9. Некоторый материал обладает как деформационным, так и вязким упрочнением, происходящим по закону

$$\sigma_i = A + B e_i^m + \beta \dot{e}_i^{\mu},$$

где A, B, β, m, μ – константы материалов; σ_i, e_i, \dot{e}_i – интенсивность нормальных напряжений, линейных деформаций и скоростей линейных деформаций.

Сформулировать закон упрочнения в терминах интенсивностей касательных напряжений, деформаций сдвига и скоростей деформаций сдвига.

Решение. Интенсивности касательных напряжений, деформаций сдвига и скоростей деформаций сдвига связаны с интенсивностями нормальных напряжений, линейных деформаций и скоростей линейных деформаций выражениями

$$T = \frac{\sigma_i}{\sqrt{3}}; \quad \Gamma = e_i \sqrt{3}; \quad H = \dot{e}_i \sqrt{3}.$$

Обратные зависимости имеют вид

$$\sigma_i = T \sqrt{3}; \quad e_i = \frac{\Gamma}{\sqrt{3}}; \quad \dot{e}_i = \frac{H}{\sqrt{3}}.$$

Подставляя последние соотношения в выражение закона упрочнения, получаем

$$T = A^* + B^* \Gamma^m + \beta^* H^{\mu},$$

где $A^* = \frac{A}{\sqrt{3}}; B^* = \frac{B}{3^{0,5(m+1)}; \beta^* = \frac{\beta}{3^{0,5(\mu+1)}}.$

Задача 3.10. В некоторый момент активного нагружения тела из материала, упрочняющегося по закону

$$\sigma_i = A + B e_i^m,$$

напряжённые состояния в точках M_1 и M_2 характеризовались соответственно тензорами

$$T_{\sigma_1} = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & -2a & 2a \\ a & 2a & 3a \end{pmatrix}; T_{\sigma_2} = \begin{pmatrix} -a & 2a & -a \\ 2a & 4a & -2a \\ -a & -2a & 0 \end{pmatrix}.$$

В какой точке и во сколько раз интенсивность деформаций была больше?

Решение. Вычисляем интенсивность нормальных напряжений в точках M_1 и M_2 :

$$\sigma_{i1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{[a - (-2a)]^2 + (-2a - 3a)^2 + (3a - a)^2 + 6[a^2 + (2a)^2]} = |a| \sqrt{34};$$

$$\sigma_{i2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(-a - 4a)^2 + (4a)^2 + (-a)^2 + 6[(2a)^2 + (-a)^2 + (-2a)^2]} = |a| \sqrt{48}.$$

Так как $\sigma_{i2} > \sigma_{i1}$, интенсивность линейных деформаций больше в точке M_2 . Чтобы определить, во сколько раз она больше, составим отношение

$$\frac{e_{i2}}{e_{i1}} = m \sqrt{\frac{\sigma_{i2} - A}{\sigma_{i1} - A}} = m \sqrt{\frac{|a| \sqrt{48} - A}{|a| \sqrt{34} - A}}.$$

Задача 3.11. При активном нагружении тела из материала, упрочняющегося по закону

$$\sigma_i = \beta \dot{e}_i^\mu,$$

компоненты тензора напряжений в точке M_1 отличаются от соответствующих компонентов в точке M_2 в k раз. Как отличаются в этих точках интенсивности скоростей деформаций?

Решение. Из выражения для интенсивности напряжений

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$$

следует, что если компоненты тензора напряжений изменяются в k раз, то σ_i изменится в $|k|$ раз. Поэтому отношение интенсивностей скоростей деформаций в соответствующих точках согласно закону упрочнения изменится в $\sqrt[\mu]{|k|}$ раз.

Задача 3.12. Интенсивности деформаций в точках M_1 и M_2 отличаются в k_e раз, а интенсивности напряжений – в k_σ раз. В точке M_1 $\sigma_{i1} = s$. Предположив, что среда упрочняется по закону

$$\sigma_i = A + B e_i^m,$$

найти s . Считать, что κ_σ и κ_e больше единицы.

Решение. Предположим сначала, что $\sigma_{i1} > \sigma_{i2}$, тогда в точке M_2

$$\sigma_{i2} = \frac{s}{\kappa_\sigma}; \quad e_{i2} = \frac{e_{i1}}{\kappa_e}.$$

На основании закона упрочнения имеем

$$Be_{i1}^m = s - A;$$

$$Be_{i2}^m = B \frac{e_{i1}^m}{\kappa_e^m} = \frac{s}{\kappa_\sigma} - A,$$

отсюда находим

$$s - A = \left(\frac{s}{\kappa_\sigma} - A \right) \kappa_e^m.$$

Из последнего выражения получаем

$$s = A \kappa_\sigma \frac{\kappa_e^m - 1}{\kappa_e^m - \kappa_\sigma}.$$

Предположим, что $\sigma_{i1} < \sigma_{i2}$, тогда в точке M_2

$$\sigma_{i2} = s \kappa_\sigma; \quad e_{i2} = e_{i1} \kappa_e.$$

Далее получаем

$$Be_{i1}^m = s - A;$$

$$Be_{i2}^m = Be_{i1}^m \kappa_e^m = s \kappa_\sigma - A,$$

отсюда окончательно находим

$$s = A \frac{\kappa_e^m - 1}{\kappa_e^m - \kappa_\sigma}.$$

Задача 3.13. Температурная зависимость предела текучести имеет вид

$$\sigma_s = \sigma_{s0} \exp(-\kappa T),$$

где σ_{s0} и κ – константы.

В точках A и B в пластическом состоянии интенсивности напряжений отличаются в m раз. Как отличаются температуры? Считать $m > 1$.

Решение. Не теряя общности, можно считать, что $\sigma_{iA} > \sigma_{iB}$. В противном случае можно изменить обозначения точек. Согласно температурной зависимости и условию пластичности Губера – Мизеса получаем

$$\sigma_{iA} = \sigma_{sA} = \sigma_{s0} \exp(-\kappa T_A);$$

$$\sigma_{iB} = \sigma_{sB} = \sigma_{s0} \exp(-\kappa T_B).$$

После почленного деления будем иметь

$$\frac{\sigma_{iA}}{\sigma_{iB}} = m = \exp[\kappa(T_B - T_A)],$$

отсюда находим разность температур:

$$T_B - T_A = \frac{\ln m}{\kappa} > 0.$$

Задача 3.14. Нанесённая на свободную поверхность листовой заготовки круглая ячейка делительной сетки диаметром $d_0 = 2 \text{ мм}$ на конечном этапе деформирования превратился в эллипс, главные диаметры которого соответственно равны $2a_1 = 4,272$; $2b_1 = 1,324$. Используя уравнение кривой упрочнения $\sigma_i = 50\varepsilon_i^{0,25}$, определить главные компоненты напряжения. Процесс деформирования считать монотонным. Интенсивность напряжений задана в Н/мм^2 .

Решение. Определим значения главных логарифмических деформаций:

$$\varepsilon_1 = \ln \frac{2a_1}{d_0}; \quad \varepsilon_1 = 0,759; \quad \varepsilon_3 = \ln \frac{2b_1}{d_0}; \quad \varepsilon_3 = -0,402; \quad \varepsilon_2 = -(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) = -0,357.$$

Интенсивность логарифмических линейных деформаций найдём по формуле

$$\varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2} = 0,781.$$

Интенсивность нормальных напряжений рассчитаем по уравнению кривой упрочнения

$$\sigma_i = 50 \varepsilon_i^{0,25} = 47.$$

Поскольку сетка нанесена на свободную поверхность, то напряжение, нормальное поверхности листа σ_2 , является главным и равно нулю. Для определения остальных главных компонент напряжений воспользуемся соотношениями Гука – Генки (3.5):

$$\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1 - \sigma} = \frac{\varepsilon_2}{\sigma_2 - \sigma} = \frac{\varepsilon_3}{\sigma_3 - \sigma} = \psi = \frac{3}{2} \cdot \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}; \quad \psi = 0,025,$$

отсюда следует

$$\sigma = -\frac{\varepsilon_2}{0,025} = \frac{0,357}{0,025} = 14,3; \quad \sigma_1 = \sigma + \frac{\varepsilon_1}{0,025} = 14,3 + \frac{0,759}{0,025} = 44,6;$$

$$\sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = \sigma + \frac{\varepsilon_3}{0,025} = 14,3 - \frac{0,402}{0,025} = -1,8.$$

Задача 3.15. Используя уравнения теории пластичности Сен-Венана – Мизеса – Леви, найти отношения приращения пластических деформаций в направлениях главных осей для трёхосного напряжённого состояния, характеризуемого тензором. Компоненты напряжений заданы в Н/мм^2 .

$$T_\sigma = \frac{\sigma_s}{\sqrt{31}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Соотношения указанной теории пластичности имеют вид

$$de_{ij} = d\lambda s_{ij},$$

где $d\lambda$ – коэффициент пропорциональности; s_{ij} – девиатор напряжений.

Вычисляем среднее напряжение

$$\sigma_{cp} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} \cdot \frac{-2 + 4 + 3}{3} = \frac{5\sigma_s}{3\sqrt{31}}.$$

Находим компоненты девиатора напряжений в главных осях:

$$s_1 = \sigma_1 - \sigma_{cp} = \frac{\sigma_s}{\sqrt{31}} \left(4 - \frac{5}{3} \right) = \frac{7\sigma_s}{3\sqrt{31}};$$

$$s_2 = \sigma_2 - \sigma_{cp} = \frac{\sigma_s}{\sqrt{31}} \left(3 - \frac{5}{3} \right) = \frac{4\sigma_s}{3\sqrt{31}};$$

$$s_3 = \sigma_3 - \sigma_{cp} = \frac{\sigma_s}{\sqrt{31}} \left(-2 - \frac{5}{3} \right) = -\frac{11\sigma_s}{3\sqrt{31}}.$$

Для проверки вычислений убеждаемся в том, что

$$s_1 + s_2 + s_3 = 0,$$

т.е. линейный инвариант девиатора напряжений равен нулю.

Используя соотношения теории пластичности, получаем

$$de_1 = d\lambda \frac{7\sigma_s}{3\sqrt{31}}; \quad de_2 = d\lambda \frac{4\sigma_s}{3\sqrt{31}}; \quad de_3 = -d\lambda \frac{11\sigma_s}{3\sqrt{31}},$$

отсюда определим соотношения приращений пластических деформаций:

$$\frac{de_1}{7} = \frac{de_2}{4} = -\frac{de_3}{11}.$$

Задача 3.16. Используя данные задачи 3.15, найти приращение работы на пластических деформациях dA_p , считая известным приращение деформации de_1 .

Решение. Выражение для приращения работы в главных осях имеет вид

$$dA_p = \sigma_1 de_1 + \sigma_2 de_2 + \sigma_3 de_3.$$

Представив de_2 и de_3 через de_1 , получим

$$de_2 = \frac{4}{7} de_1; \quad de_3 = -\frac{11}{7} de_1.$$

Внося в формулу для dA_p выражения напряжений и приращений деформаций, получаем

$$dA_p = \frac{\sigma_s}{\sqrt{31}} \left[4 \cdot 1 + 3 \frac{4}{7} + (-2) \left(-\frac{11}{7} \right) \right] de_1 = \frac{2\sqrt{31}}{7} \sigma_s de_1.$$

Так как при пластической деформации изменения объёма не происходит:

$$de_1 + de_2 + de_3 = 0,$$

то приращение работы можно найти также по формуле

$$dA_p = s_1 de_1 + s_2 de_2 + s_3 de_3$$

или

$$dA_p = \frac{\sigma_s}{3\sqrt{31}} \left[7 \cdot 1 + 4 \frac{4}{7} + (-11) \left(-\frac{11}{7} \right) \right] de_1 = \frac{2\sqrt{31}}{7} \sigma_s de_1.$$

Получен тот же результат.

Задача 3.17. Используя результаты задачи 3.16, вычислить коэффициент пропорциональности $d\lambda$, входящий в соотношения *теории пластичности Сен-Венана – Мизеса – Леви*.

Решение. Одно из выражений для коэффициента $d\lambda$ имеет вид

$$d\lambda = \frac{dA_p}{2T^2},$$

где T – интенсивность касательных напряжений.

Как видно, всегда, $d\lambda > 0$, так как при активном нагружении $dA_p > 0$, $T^2 > 0$.

Согласно решению задачи 3.16

$$dA_p = \frac{2\sqrt{31}}{7} \sigma_s de_1,$$

тогда

$$T = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$$

и

$$d\lambda = \frac{\frac{2\sqrt{31}}{7} \sigma_s de_1}{2 \left(\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} \right)^2} = \frac{3\sqrt{31} de_1}{7\sigma_s}.$$

ТЕМА 4. ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

План

- 4.1. Основные уравнения теории ползучести
- 4.2. Примеры решения задач

4.1. Основные уравнения теории ползучести

Ползучестью материала называют явление, связанное с изменением во времени напряжений и деформаций при постоянной нагрузке. Одну сторону этого явления – изменение во времени деформаций – называют собственно ползучестью или последствием, а другую – изменение во времени напряжений – релаксацией. К числу простейших теорий ползучести относятся теория старения, теория течения и теория упрочнения.

Последние две теории получили наибольшее распространение при расчете конструкции в рамках малых деформации и при анализе медленных процессов горячей обработки металлов давлением при больших деформациях.

В теории течения наиболее распространенной аналитической зависимостью интенсивности скорости деформации ξ_i^c от интенсивности напряжений σ_i (уравнение состояния) является зависимость следующего вида:

$$\xi_i^c = k \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_*} \right)^n \quad \text{или} \quad \xi_i^c = k (\sigma_i)^n, \quad (4.1)$$

где k, n - константы материала, зависящие от температуры деформирования; σ_* - выбранная некоторая величина напряжения, например предел текучести материала.

В теории упрочнения уравнения состояния записываются как

$$(\varepsilon_i^c)^\beta \xi_i^c = \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_*} \right)^\nu, \quad (4.2)$$

где β, α, ν - константы материала, зависящие от температуры деформирования;

$\varepsilon_i^c = \int \xi_i^c dt$ - интенсивность степени деформации ползучести.

В ряде случаев удобно эти выражения разрешить относительно σ_i и записать как

$$\sigma_i = \left(\frac{\xi_i^c}{k} \right)^{1/n}, \quad (4.3)$$

и

$$\sigma_i = a (\xi_i^c)^{m_1} P^{m_2}, \quad (4.4)$$

где a, m_1, m_2 – константы материала, зависящие от температуры деформирования; P

- параметр Удквиста; $P = \int \xi_i^c dt$.

Зависимость компонентов скоростей деформаций ползучести от компонентов девиатора напряжений имеют вид

$$\xi_{ij}^c = \frac{3}{2} \frac{\xi_i^c}{\sigma_i} (\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0), \quad (4.5)$$

где σ_0 - среднее напряжение.

4.2. Примеры решения задач

Задача 4.1. Найти среднее давление горячей осадки круглого цилиндра диаметром d и высотой $2h$ жесткими плитами, одна из которых движется со скоростью v (рис. 4.1), при деформации ползучести в предположении, что напряжения и деформации не зависят от координаты z и выполняется гипотеза плоских сечений. Интенсивность сил трения на торцах пропорциональна величине максимального касательного напряжения $q = m \tau_{\max} = m \frac{\sigma_i}{2}$; интенсивность скоростей деформации связана с интенсивностью напряжений зависимостью $\xi_i = k \sigma_i^n$, где k и n - константы материала.

Решение. Из гипотезы плоских сечений следует постоянство скорости осевой деформации (независимость её от радиуса r)

$$\xi_z = const. \quad (4.6)$$

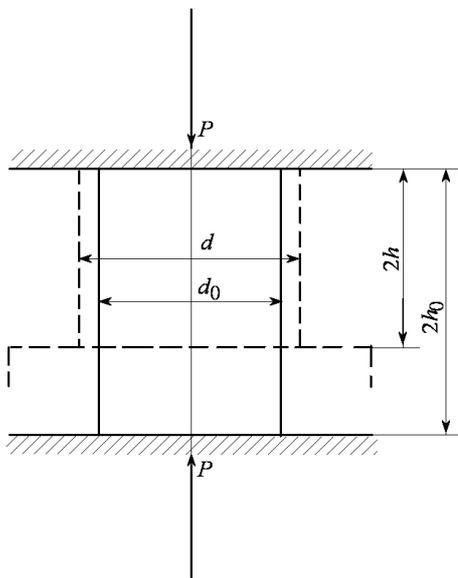


Рис. 4.1. Круговой цилиндр, сжимаемый между двумя жесткими плитами в недеформированном и деформированном состояниях

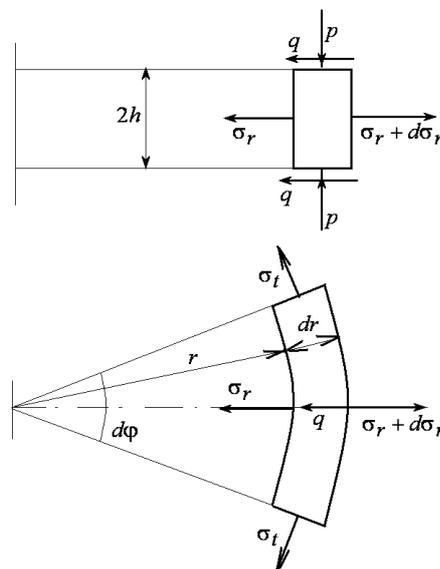


Рис. 4.2. К составлению уравнения равновесия элемента, вырезанного из цилиндра

Зависимости скоростей радиальной и окружной деформации от скорости радиального перемещения v_r для рассматриваемой осесимметричной задачи имеет вид

$$\xi_r = \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad \xi_t = \frac{v_r}{r}. \quad (4.7)$$

поставим эти выражения в условие несжимаемости

$$\xi_r + \xi_t + \xi_z = 0, \quad (4.8)$$

получим

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \xi_z = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) = -\xi_z r.$$

Интегрируя это уравнение, учитывая (4.6), получим

$$v_r = -\xi_z \frac{r}{2} + \frac{c}{r}.$$

Постоянную интегрирования находим из условия $r=0$; $v_r=0$, откуда получаем $c=0$ и, следовательно

$$v_r = -\xi_z \frac{r}{2}.$$

Тогда, согласно (4.7) имеем

$$\xi_r = \xi_t = -\xi_z/2.$$

Поэтому из зависимостей скоростей деформаций от напряжений получим

$$\sigma_r = \sigma_t. \quad (4.9)$$

Используя выражение для интенсивности напряжений с учетом (4.9) и условий симметрии $\tau_{rt} = \tau_{zt} = 0$, получим

$$\sqrt{(\sigma_r - \sigma_z)^2 + 3\tau_{rz}^2} = \sigma_i.$$

Пренебрегаем вторым слагаемым под радикалом по сравнению с первым. Тогда будем иметь

$$\sigma_r - \sigma_z = \sigma_i,$$

или

$$\sigma_i = \sigma_r + p. \quad (4.10)$$

Скорость деформации в направлении оси z

$$\xi_z = -\frac{v}{2h},$$

где v -скорость движения одной из плит.

Используя это выражение, найдем выражение для интенсивности скоростей деформаций

$$\xi_i = -\xi_z = \frac{v}{2h}. \quad (4.11)$$

Следовательно, согласно формулам зависимости скорости деформаций от интенсивности напряжений и выражения (4.11), определим

$$\sigma_i = \left(\frac{\xi_i}{k} \right)^{1/n} = \left(\frac{v}{2kh} \right)^{1/n}. \quad (4.12)$$

Из этой формулы следует, что интенсивность напряжений не меняется по объему цилиндра. Поэтому, согласно формуле (4.10)

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = -\frac{dp}{dr}. \quad (4.13)$$

Дифференциальное уравнение равновесия элемента, вырезанного из цилиндра (рис. 4.2), запишется так

$$-\sigma_r r d\varphi 2h - 2qr d\varphi dr + (\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)d\varphi 2h - \sigma_t dr 2h d\varphi = 0.$$

После приведения подобных членов и использования выражения (4.9) получим

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{q}{h}. \quad (4.14)$$

Учитывая, что $q = m \frac{\sigma_i}{2}$, уравнение (4.14) принимает вид

$$\frac{dp}{dr} = -m \frac{\sigma_i}{2h}.$$

Интегрируя это уравнение, имеем

$$p = c - m\sigma_i r / 2h. \quad (4.15)$$

Постоянную интегрирования c находим из граничного условия при $r = \frac{d}{2}$;

$\sigma_r = 0$ и поэтому согласно выражению (4.15) при $r = \frac{d}{2}$; $p = \sigma_i$.

В результате получаем

$$c = \sigma_i \left(1 + m \frac{d}{4n} \right).$$

и, следовательно, выражение (4.15) принимает вид

$$p = \frac{\sigma_i}{2} \left[2 + m \left(\frac{d}{2h} - \frac{r}{h} \right) \right]. \quad (4.16)$$

Деформирующая сила P определяется по формуле

$$P = 2\pi \int_0^{d/2} p r dr$$

Подставим в это выражение соотношение (4.16). Тогда после интегрирования, используя формулы (4.12) и условие несжимаемости $hd^2 = h_0 d_0^2$, получим величину среднего давления

$$p_{cp} = \frac{4P}{\pi d_0^2} = \left(\frac{v}{2kh_0} \right)^{1/n} f\left(\frac{h_0}{h} \right), \quad (4.17)$$

где

$$f\left(\frac{h_0}{h} \right) = \frac{1}{12} \left(\frac{h_0}{h} \right)^{\frac{n+1}{n}} \left[12 + m \frac{d_0}{h_0} \left(\frac{h_0}{h} \right)^{3/2} \right]. \quad (4.18)$$

Множитель при $f\left(\frac{h_0}{h}\right)$ в формуле (4.17) представляет собой величину интенсивности напряжений в начале процесса сжатия при $h = h_0$.

Задача 4.2. Найти среднее давление горячего прессования круглого прутка в конической матрице с углом $2\alpha_1$ при изменении его радиуса с $R_1 = h_1$ до $R_2 = h_2$ (рис. 4.3) при деформации ползучести в предположении справедливости гипотезы плоских сечений и независимости напряжений и деформаций от координаты r . Интенсивность скоростей деформаций от интенсивности напряжений определяется зависимостью $\xi_i = k\sigma_i^n$, а интенсивность сил трения принимаем как $q = m\tau_{\max} = m\frac{\sigma_i}{2}$.

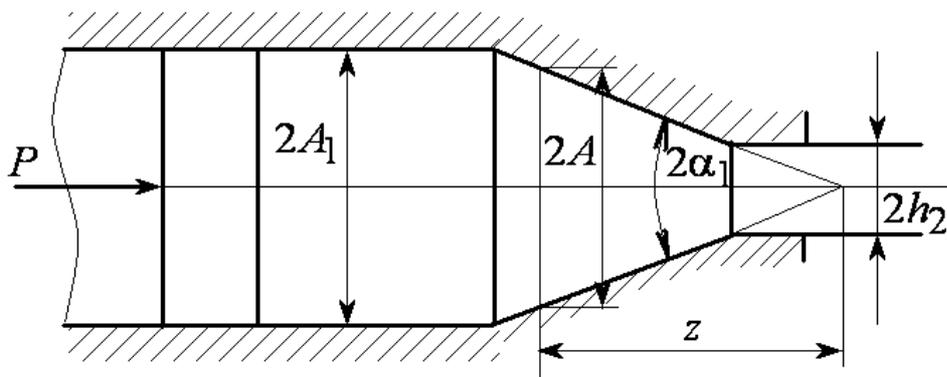


Рис. 4.3. Схема прессования круглого прутка в конической матрице

Решение. Используя условие $\sigma_r = \sigma_t$, а также условие симметрии $\tau_{rt} = \tau_{zt} = 0$, и пренебрегая касательным напряжением τ_{rz} по сравнению с другим слагаемым в выражении для интенсивности напряжений, а также принимая, что приближенно $\sigma_R \approx -p$, запишем

$$p - \sigma_z = \sigma_i. \quad (4.19)$$

Теперь выражение, определяющее интенсивность сил напряжения, имеет вид

$$q = m(p - \sigma_z) / 2. \quad (4.20)$$

Выберем начало координат в вершине конуса и рассмотрим равновесие элемента, вырезанного из прутка (рис. 4.4)

$$\begin{aligned} (\sigma_z + d\sigma_z)\pi(R + dR)^2 - \sigma_z\pi R^2 - p2\pi R\left(\frac{dz}{\cos\alpha_1}\right)\sin\alpha_1 - \\ - q2\pi R\left(\frac{dz}{\cos\alpha_1}\right)\cos\alpha_1 = 0. \end{aligned}$$

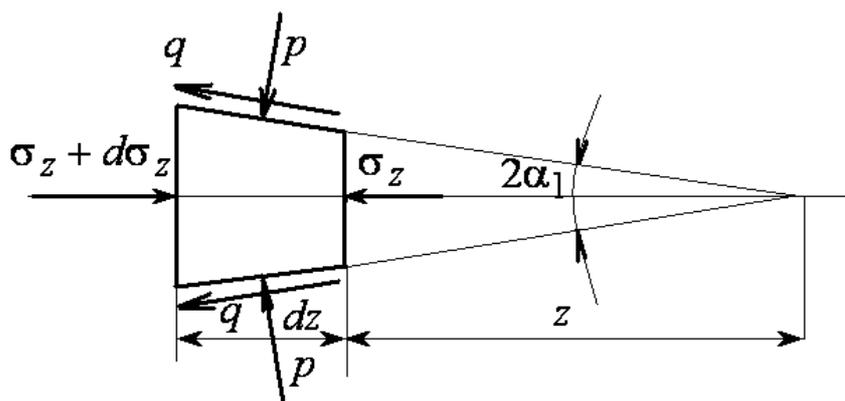


Рис. 4.4. К выводу уравнения равновесия элемента, вырезанного из прутка

Учитывая, что $R = z \operatorname{tg} \alpha_1$, получим уравнение равновесия в виде

$$\frac{d\sigma_z}{dR} - 2 \frac{p - \sigma_z}{R} - \frac{2q \operatorname{ctg} \alpha_1}{R} = 0. \quad (4.21)$$

Принимая во внимание (4.19) и (4.20), найдем

$$\frac{d\sigma_z}{dR} - \frac{2 + m \operatorname{ctg} \alpha_1}{R} \sigma_i = 0. \quad (4.22)$$

Для того чтобы проинтегрировать это уравнение, выразим интенсивность напряжений через радиус. Для этого сначала определим зависимость интенсивности скоростей деформации от радиуса.

Скорость деформации в направлении прессования

$$\xi_z = -\frac{dv}{dz}.$$

Закон изменения скоростей перемещений следует из условия несжимаемости материала

$$v \pi R^2 = v_1 \pi R_1^2,$$

откуда

$$v = \frac{v_1 R_1^2}{R^2}$$

и следовательно

$$\frac{dv}{dz} = -2v_1 \frac{R_1^2}{R^3} \frac{dR}{dz}.$$

Поскольку $R = z \operatorname{tg} \alpha_1$, $\frac{dR}{dz} = \operatorname{tg} \alpha_1$

и, следовательно

$$\xi_z = -\frac{dv}{dz} = 2v_1 \frac{R_1^2}{R^3} \operatorname{tg} \alpha_1. \quad (4.23)$$

Из равенства радиального и окружного напряжений следует равенство радиальной и окружной скоростей деформаций.

Используя условие несжимаемости материала

$$\xi_R + \xi_t + \xi_z = 0,$$

получим

$$\xi_R = \xi_t = -\frac{\xi_z}{2}.$$

Теперь интенсивность скоростей деформаций будет определяться выражением

$$\xi_i = \xi_z = 2v_1 R_1^2 \operatorname{tg} \alpha_1 / R^3. \quad (4.24)$$

Интенсивность напряжений найдем по формуле

$$\sigma_i = (\xi_i / k)^{1/n} = \left(\frac{2v_1 R_1^2 \operatorname{tg} \alpha_1}{k R^3} \right)^{1/n}. \quad (4.25)$$

Преобразуем уравнение равновесия (4.22), используя соотношение (4.24)

$$\frac{d\sigma_z}{dR} = 2^{1/n} (2 + m \operatorname{ctg} \alpha_1) \left(\frac{v_1 R_1^2 \operatorname{tg} \alpha_1}{k} \right)^{1/n} R^{-(n+3)/n}.$$

Интегрируя, находим

$$\sigma_z = c - \left(\frac{2^{1/n}}{3} \right) n (2 + m \operatorname{ctg} \alpha_1) \left(\frac{v_1 R_1^2 \operatorname{tg} \alpha_1}{k} \right)^{1/n} R^{-3/n}.$$

Постоянную интегрирования c устанавливаем из граничного условия при $R = R_2$ $\sigma_z = 0$.

В результате получаем

$$\sigma_z = \left(\frac{2^{1/n}}{3} \right) n (2 + m \operatorname{ctg} \alpha_1) \left(\frac{v_1 R_1^2 \operatorname{tg} \alpha_1}{k} \right)^{1/n} (R_2^{-3/n} - R^{-3/n}).$$

Среднее давление прессования σ_{z1} находим из последнего уравнения, полагая в нем $R = R_1$

$$\sigma_{z1} = \left(\frac{2^{1/n}}{3} \right) n (2 + m \operatorname{ctg} \alpha_1) \left(\frac{v_1 R_1^2 \operatorname{tg} \alpha_1}{k} \right)^{1/n} (R_1^{3/n} - R_2^{3/n}) / (R_1 R_2)^{3/n}. \quad (4.26)$$

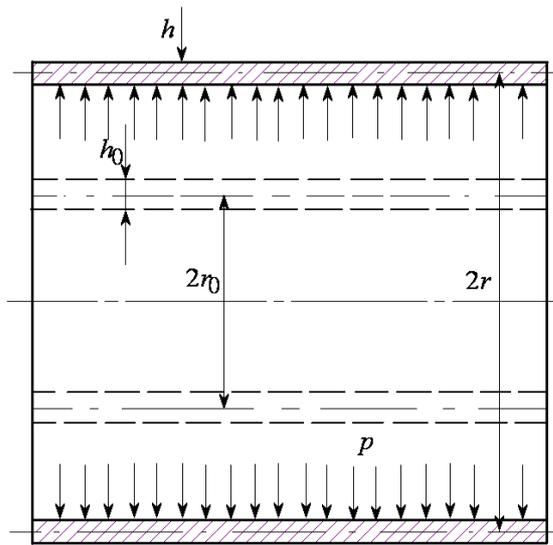


Рис. 4.5. Тонкостенная цилиндрическая оболочка нагруженная внутренним давлением

Задача 4.3. Найти безразмерное давление от отношения радиусов необходимое для деформации тонкостенной цилиндрической оболочки с днами при ползучести (рис. 4.5)

Интенсивность напряжений связана с интенсивностью скоростей деформации и параметром Удквиста, уравнением состояния $\sigma_i = a \xi_i^{m_1} P^{m_2}$.

Решение. Рассмотрим тонкостенную цилиндрическую оболочку с днами начального среднего радиуса r_0 , начальной толщины h_0 , нагруженную давлением p , которое может быть как постоянным, так и изменяющимся во времени (рис. 4.5).

Напряженное состояние такой оболочки однородное и двухосное (так как нормальное напряжение в поверхностях, эквидистантных срединной, в тонкостенных оболочках обычно принимается равным нулю).

В некоторый момент деформирования, когда средний радиус оболочки r , а толщина h , окружное σ_t и меридиональное σ_m напряжения определяются по формулам

$$\sigma_t = pr/h, \quad \sigma_m = pr/(2h). \quad (4.27)$$

Подставим эти выражения в формулу для интенсивности напряжений, учитывая, что третье главное напряжение равно нулю. Тогда получим

$$\sigma_i = \sqrt{3}\sigma_m = \sqrt{3} pr/(2h). \quad (4.28)$$

Скорости радиальной и окружной деформации равны

$$\xi_r = \frac{1}{h} \frac{dh}{dt}, \quad \xi_t = \frac{1}{r} \frac{dr}{dt} = \frac{v}{r}, \quad (4.29)$$

где $v = \frac{dr}{dt}$ - скорость радиального перемещения точек оболочки.

Поскольку в рассматриваемом напряженном состоянии среднее нормальное напряжение

$$\sigma_0 = (\sigma_t + \sigma_m)/3,$$

скорость меридиональной деформации согласно уравнениям связи скоростей деформации и напряжений (4.5) равна нулю: $\xi_m = 0$, и, следовательно, из условия несжимаемости $\xi_r + \xi_t + \xi_m = 0$ имеем $\xi_r = -\xi_t$. Поэтому выражение для

определения интенсивности скоростей деформации запишется так

$$\xi_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \xi_t = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{r} \frac{dr}{dt} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{v}{r}. \quad (4.30)$$

Параметр Удквиста устанавливаем по формуле

$$P = \int \xi_i dt = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{r} = \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \frac{r}{r_0}. \quad (4.31)$$

Используем уравнение состояния, получим

$$\sigma_i = a [2v/(\sqrt{3}r)]^{m_1} [2/(\sqrt{3}) \ln(r/r_0)]^{m_2}. \quad (4.32)$$

Сопоставим интенсивности напряжения по (4.28) и (4.32), учитывая, что из условия несжимаемости $2\pi rh = 2\pi r_0 h_0$ и, следовательно, $rh = r_0 h_0$, получаем зависимость безразмерного давления от отношения радиусов

$$\bar{p} = (r_0/r)^{m_1+2} [\ln(r/r_0)]^{m_2}, \quad (4.33)$$

где
$$\bar{p} = 3 \frac{m_1+m_2+1}{2} pr_0 \left/ \left[2^{m_1+m_2+1} (v/r_0)^{m_1} ah_0 \right] \right. \quad (4.34)$$

Исследование зависимости (4.33) показывает, что давление имеет максимум при $r/r_0 = \exp[m_2/(m_1+2)]$.

Задача 4.4. Найти безразмерное давление от отношения радиусов для деформации тонкостенной сферической оболочки рис. 4.6. Интенсивность напряжений связана с интенсивностью скоростей деформации и параметром Удквиста уравнением состояние $\sigma_i = a \xi_i^{m_1} P^{m_2}$.

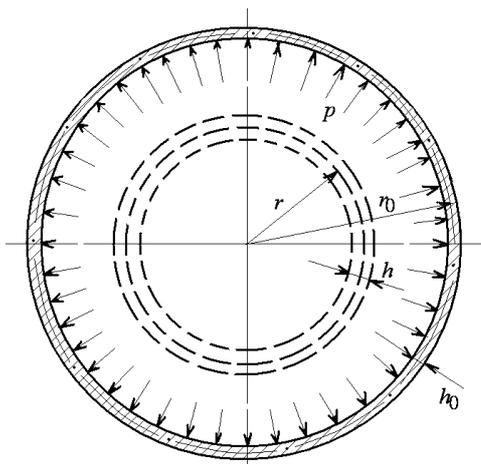


Рис. 4.6. Тонкостенная сферическая оболочка, нагруженная внутренним давлением

Решение. Представим себе тонкостенную сферическую оболочку начального среднего радиуса r_0 , начальной толщины h_0 , нагруженную давлением p , которое может быть постоянным и изменяющимся во времени (рис. 4.6). Напряженное состояние такой оболочки однородное двухосное равное растяжение (так же, как и в случае тонкостенной цилиндрической оболочки, напряжениями в поверхностях, эквидистантных срединной поверхности, пренебрегаем).

В некоторый момент деформирования, когда средний радиус оболочки r , а толщина h , окружное σ_t и меридиональное σ_m напряжения равны между собой

$$\sigma_t = \sigma_m = pr/(2h). \quad (4.35)$$

Подставим эти выражения в формулу для интенсивности напряжений, учитывая, что третье главное напряжение равно нулю. Тогда получим

$$\sigma_i = \sigma_m = pr/(2h). \quad (4.36)$$

Скорости радиальной, окружной и меридиональной деформаций равны

$$\xi_r = \frac{1}{h} \frac{dh}{dt}, \quad \xi_t = \xi_m = \frac{1}{r} \frac{dr}{dt} = \frac{v}{r}, \quad (4.37)$$

где $v = \frac{dr}{dt}$ - скорость радиального перемещения точек оболочки.

Заметим, что равенство скоростей окружной и меридиональной деформаций следует из равенства окружного и меридионального напряжений. Из условия несжимаемости $\xi_r + \xi_t + \xi_m = 0$ имеем $\xi_r = -2\xi_t = -2\xi_m$. Поэтому имеем интенсивность скоростей деформаций

$$\xi_i = 2\xi_t = 2v/r. \quad (4.38)$$

Параметр Удквиста определится как

$$P = \int \xi_i dt = 2 \int_{r_0}^r \frac{dr}{r} = 2 \ln \frac{r}{r_0}. \quad (4.39)$$

Используя (4.38) и (4.39), имеем согласно уравнению состояния

$$\sigma_i = a[2v/r]^{m_1} [2 \ln(r/r_0)]^{m_2}. \quad (4.40)$$

Сопоставим интенсивности напряжений по (4.36) и (4.40), учитывая, что из условия несжимаемости $4\pi r^2 h = 4\pi r_0^2 h_0$ и, следовательно, $r^2 h = r_0^2 h_0$, получаем зависимость безразмерного давления от отношения радиусов

$$\bar{p} = (r_0/r)^{m_1+3} [\ln(r/r_0)]^{m_2}, \quad (4.41)$$

где $\bar{p} = pr_0 / [2^{m_1+m_2+1} (v/r_0)^{m_1} ah_0]$.

Исследование зависимости (4.41) показывает, что давление имеет максимум при $r/r_0 = \exp[m_2/(m_1+3)]$.

Тема 5. Метод осредненных напряжений (инженерный метод)

План

- 5.1. Основные допущения и предположения
- 5.2. Примеры решения задач

5.1. Основные допущения и предположения

Методом осредненных напряжений определяют удельное усилие процессов обработки металлов давлением и распределение нормальных напряжений на поверхности контакта деформируемой заготовки и инструмента. Он основан на решении приближенных дифференциальных уравнений равновесия совместно с приближенным условием пластичности без привлечения физических соотношений между напряжениями и деформациями или скоростями деформаций. Это достигается введением ряда упрощающих допущений. К числу важнейших из них относятся следующие:

- 1) расчетная схема технологического процесса приводится к задачам о плоском напряженном состоянии, плоском деформированном состоянии или о осесимметричном состоянии; в последнем случае принимается равенство двух из трех нормальных напряжений;
- 2) нормальные напряжения σ_{ij} являются функциями одной из координат;
- 3) касательные напряжения τ_{ij} являются функциями одной из координат (как правило, определяющей положение контактных поверхностей) и принимает максимальное значение τ_k на контактной поверхности и 0 на осевой;
- 4) условие пластичности берется в линейной форме

$$\sigma_i - \sigma_j = c.$$

При этом, если касательные напряжения сравнительно малы:

$$0 \leq \tau_k \leq 0,7k,$$

где $k = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$ - пластическая постоянная материала, то $c = \beta\sigma_s$ (β -коэффициент,

учитывающий схему деформации и изменяющийся в пределах $1 \leq \beta \leq 1,15$). Если величины касательных напряжений значительны, т.е. $\tau_k > 0,7k$, то принимается $c = 0$.

Введение упрощающих допущений позволяют привести решение задачи к решению одного обыкновенного дифференциального уравнения (взамен системы дифференциальных уравнений равновесия в частных производных) совместно с линейным условием пластичности.

На поверхности контакта заготовки и инструмента граничные условия для напряжений обычно формулируются в виде одного закона или совокупности следующих законов:

- 1) закона Кулона

$$|\tau_k| = \pm \mu \sigma_n$$

где μ - коэффициент кулонова трения. Условие текучести накладывает ограничения на величину касательного контактного напряжения:

$$|\tau_k| \leq k;$$

- 2) закона трения Прандтля

$$\tau_k = \pm m \sigma_s;$$

- 3) закона линейного изменения касательных напряжений вдоль контактной поверхности от нуля на оси симметрии до максимальной величины

$$|\tau_k| = 2k \frac{x}{a},$$

где a - длина участка контактной поверхности; x - текущая координата, отсчитываемая от оси симметрии.

Рассмотрим использование метода осредненных напряжений на примере решения нескольких задач.

5.2. Примеры решения задач

Задача 5.1. Определить удельное усилие осадки призматической заготовки шириной a , высотой h и длиной $l \gg a$ (рис. 5.1). На границе контакта справедлив закон прандтлева трения $\tau_k = -k$.

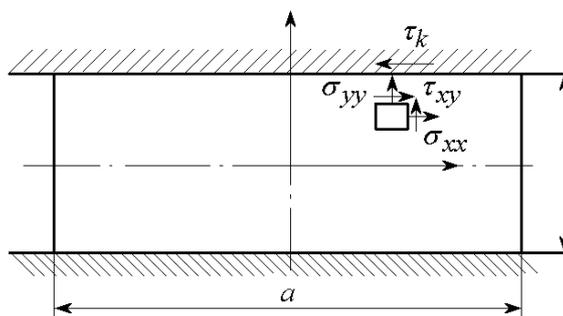


Рис. 5.1

Решение. Предполагаем, что касательное напряжение τ_{xy} является функцией только координаты y , т.е. $\tau_{xy} = f_1(y)$. На контактной поверхности оно равно τ_k , а на оси симметрии – нулю. Нормальное напряжение σ_{xx} считаем функцией только координаты x , т.е. $\sigma_{xx} = f_2(x)$.

Принимая деформированное состояние плоским, условие текучести запишем в следующем виде:

$$\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = 2k.$$

При этих предположениях из системы дифференциальных уравнений равновесия

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

остается лишь одно первое, второе уравнение тождественно удовлетворяется. Проинтегрируем первое уравнение по y от 0 до $h/2$:

$$\int_0^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dy + \int_0^{h/2} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy = 0.$$

Тогда получим

$$\frac{d\sigma_{xx}}{dx} + \frac{2\tau_k}{h} = 0.$$

Используя условие текучести, находим

$$\frac{d\sigma_{yy}}{dx} + \frac{2\tau_k}{h} = 0. \quad (5.1)$$

Подставляя в уравнение (5.1) граничные условия для касательных напряжений, т.е. $\tau_k = -k$, получаем

$$\frac{d\sigma_{yy}}{dx} - \frac{2k}{h} = 0. \quad (5.2)$$

Интегрирование выражения (5.2) приводит к виду

$$\sigma_{yy} = 2k \frac{x}{h} + c_1.$$

Из условия, что при $x = a/2$ $\sigma_{xx} = 0$, а $\sigma_{yy} = -2k$, определяют постоянную интегрирования:

$$\begin{aligned} c_1 &= -2k - k \frac{a}{h} \\ \sigma_{yy} &= -2k \left(1 + \frac{a - 2x}{2h} \right). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Полное усилие осадки найдем интегрированием (5.3) от 0 до a :

$$P_{\text{полн}} = -2 \int_0^{a/2} \sigma_{yy} dx = +2\kappa a \left(1 + \frac{a}{4h} \right).$$

Удельное усилие осадки определим по уравнению

$$p_{\text{ср}} = \frac{2P_{\text{полн}}}{a} = +2\kappa \left(1 + \frac{a}{4h} \right).$$

Задача 5.2. Определить удельное усилие осадки призматической заготовки, если на границе контакта справедлив закон линейного изменения касательного напряжения $\tau_k = -k(2x/a)$.

Решение. Используя уравнение равновесия (5.1) полученное при решении предыдущей задачи, и подставляя в него выражение для τ_k , получаем

$$\frac{d\sigma_{yy}}{dx} - \frac{4kx}{ha} = 0. \quad (5.4)$$

Интегрируя уравнение (5.4) приводит к соотношению

$$\sigma_{yy} = 2k \frac{x^2}{ha} + c.$$

Из условия, что при $x = a/2$ $\sigma_{xx} = 0$, $\sigma_{yy} = -2k$, находим постоянную интегрирования:

$$c = -2k - 2k \frac{a^2}{4ha}; \quad \sigma_{yy} = -2k \left(1 + \frac{a}{4h} - \frac{x^2}{ha} \right).$$

Удельное усилие осадки определим следующим образом:

$$p_{\text{ср}} = -\frac{2}{a} \int_0^{a/2} \sigma_{yy} dx = 2k \left(1 + \frac{a}{6h} \right).$$

Задача 5.3. Определить удельное усилие осадки цилиндрической заготовки диаметром d и высотой h (рис. 5.2,а), если на границе контакта справедлив закон прандтлева трения $\tau_k = -m\sigma_s$.

Решение. Предполагаем, что при изменении от z до 0 касательное напряжение изменяется от 0 до τ_k на контактных поверхностях, и допускаем, что напряжение σ_r и σ_z не зависит от z . В этом случае уравнение равновесия элементарного сектора (рис. 5.2, б) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sum F_r = & -\sigma_r r \delta \theta dz + \left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{r} dr \right) (r + dr) d\theta dz - \tau_{rz} r d\theta dz + \\ & + \left(\tau_{rz} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} dz \right) r d\theta dr - 2\sigma_\theta dz dr \sin \frac{d\theta}{2} = 0 \end{aligned}$$

или

$$r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \sigma_r - \sigma_\theta + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial z} r = 0.$$

Так как в задаче реализуется осесимметричное напряженное состояние, то предполагаем, что имеет место условие полной пластичности, т.е.

$$\sigma_r = \sigma_\theta. \quad (5.5)$$

С учетом условия (5.5) уравнение равновесия переписывается в виде

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial z} = 0. \quad (5.6)$$

Проинтегрируем уравнение (5.6) от 0 до $h/2$:

$$\int_0^{h/2} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dz + \int_0^{h/2} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial z} dz = 0$$

и получим

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2\tau_k}{h} = 0. \quad (5.7)$$

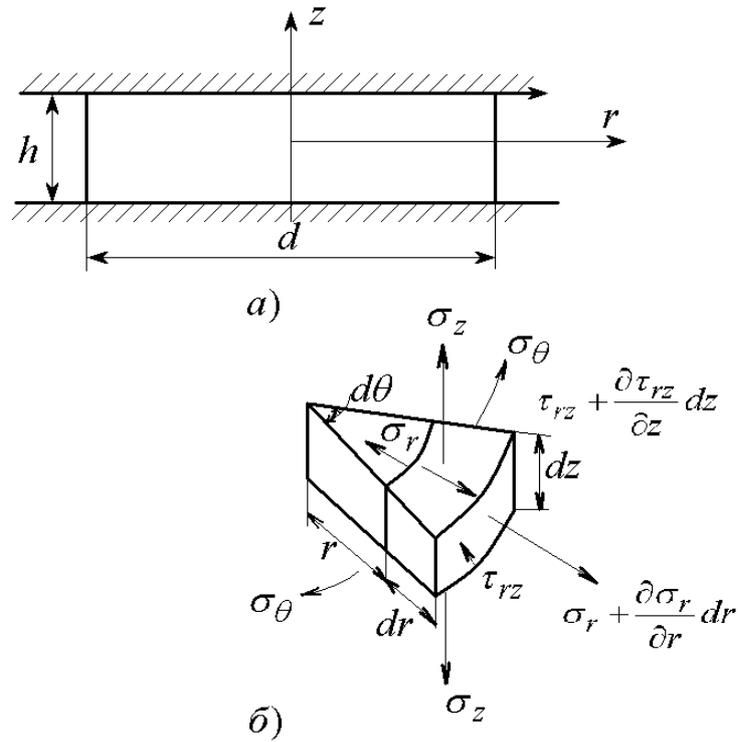


Рис. 5.2

Подставляя в уравнение (5.7) граничные условия для трения, перепишем это уравнение в виде

$$\frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{2m\sigma_s}{h} = 0.$$

В случае осесимметричного напряженного состояния в предположении полной пластичности условие текучести имеет вид:

$$\sigma_r - \sigma_z = \sigma_s. \quad (5.8)$$

Учитывая (5.8), уравнение (5.7) записываем так:

$$\frac{d\sigma_z}{dr} - \frac{2m\sigma_s}{h} = 0. \quad (5.9)$$

Интегрирование выражения (5.9) позволяет получить закон изменения нормальных напряжений на границе контакта:

$$\sigma_z = 2m\sigma_s \frac{r}{h} + c_1.$$

Из условия что при $r = d/2$ $\sigma_r = 0$, $\sigma_z = -\sigma_s$, определим постоянную интегрирования:

$$c_1 = -\sigma_s - 2m\sigma_s \frac{d}{2h}; \quad \sigma_z = -\sigma_s \left[1 + \frac{2m}{h} \left(\frac{d}{2} - r \right) \right].$$

Деформирующую силу определим из следующего выражения:

$$P = - \int_0^{d/2} \sigma_z 2\pi r dr = 2\pi \sigma_s \int_0^{d/2} \left[1 + \left(\frac{d}{2h} - \frac{r}{h} \right) 2m \right] r dr = \frac{\sigma_s \pi d^2}{4} \left(1 + \frac{md}{3h} \right).$$

Удельное усилие процесса

$$p_{cp} = \frac{4P}{\pi d^2} = \sigma_s \left(1 + \frac{md}{3h} \right).$$

Задача 5.4. Определить удельное усилие осадки цилиндрической заготовки, если на поверхности контакта справедлив следующий закон изменения касательных напряжений:

$$\tau_k = -\frac{\sigma_s r}{d}.$$

Решение. Проводя аналогичные преобразования, как и в предыдущей задаче, уравнение равновесия для данного случая можно записать в виде

$$\frac{d\sigma_z}{dr} - 2\frac{\sigma_s r}{hd} = 0.$$

Интегрируя это выражение, получаем

$$\sigma_z = \sigma_s \frac{r^2}{hd} + c_2.$$

Постоянную интегрирования определим из условия, что при $r = d/2$ $\sigma_r = 0$
 $\sigma_z = -\sigma_s$.

Тогда

$$c_2 = -\sigma_s \left(1 + \frac{d^2}{4hd} \right);$$

$$\sigma_z = -\sigma_s \left[1 + \frac{1}{hd} \left(\frac{d^2}{4} - r^2 \right) \right].$$

Полное усилие процесса определим следующим образом:

$$P = - \int_0^{d/2} \sigma_z 2\pi r dr = 2\pi \sigma_s \int_0^{d/2} \left[1 + \frac{1}{hd} \left(\frac{d^2}{4} - r^2 \right) \right] r dr = 2\pi \sigma_s \left[\frac{d^2}{8} - \frac{d^3}{64hd} \right].$$

Удельное усилие процесса

$$p_{cp} = \frac{4P}{\pi d^2} \sigma_s \left(1 + \frac{d}{8h} \right).$$

Задача 5.5. Определить удельное усилие открытой прошивки плоским пуансоном диаметром d , цилиндрической заготовки диаметром D (рис. 5.3). Предполагаем, что на поверхности контакта пуансона и заготовки справедлив закон прадтлева трения $\tau_k = -m \sigma_s$.

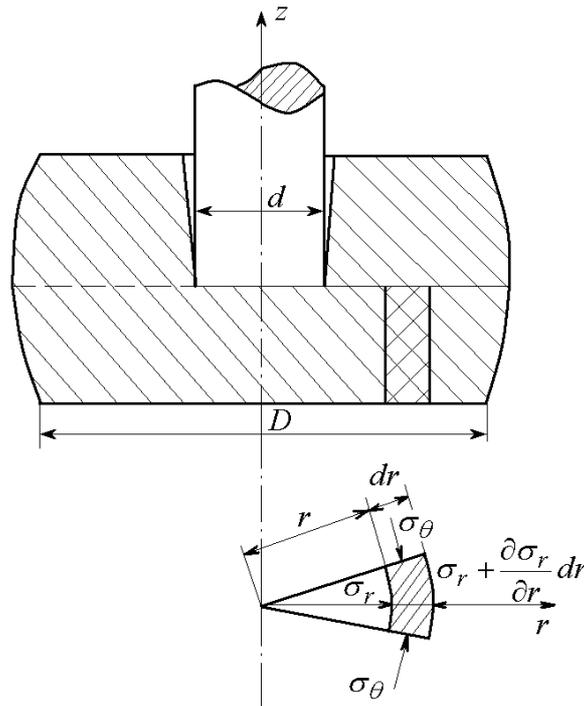


Рис. 5.3

Решение. Допускаем, что часть деформируемой заготовки, непосредственно находящейся под воздействием пуансона, подвергается осаживанию, которому препятствует кольцевая часть, окружающая металл.

Тогда, используя уравнение равновесия для случая свободной осадки цилиндрических заготовок и закон трения на контактной поверхности, получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$d\sigma_z = 2\sigma_s m \frac{dr}{h}.$$

Интегрируя его, определяем

$$\sigma_z = 2\sigma_s m \frac{r}{h} + c.$$

Постоянная интегрирования находится из условия, что на границе цилиндрической и кольцевой частей радиальные напряжения равны между собой. Из условия текучести следует

$$\sigma_r - \sigma_z = \sigma_s .$$

При $r = d/2$

$$\sigma_z = -\sigma_s - \sigma_k ,$$

где σ_k - сопротивление (сжимающее напряжение), вызываемое кольцевой частью.

Тогда

$$c = -\sigma_s m \frac{d}{h} - \sigma_s - \sigma_k .$$

Окончательно нормальное напряжение определим следующим образом:

$$\sigma_z = -\sigma_s \left[1 + \frac{m}{h}(d - 2r) \right] - \sigma_k .$$

Деформирующая сила

$$\begin{aligned} P &= - \int_0^{d/2} \sigma_z 2\pi r dr = \sigma_s \int_0^{d/2} \left[1 + \frac{m}{h}(d - 2r) \right] 2\pi r dr + \int_0^{d/2} \sigma_k 2\pi r dr = \\ &= \sigma_s \left[1 + \frac{md}{3h} \right] \frac{\pi d^2}{4} + \sigma_k \frac{\pi d^2}{4} . \end{aligned}$$

Удельное усилие

$$p_{cp} = \frac{4P}{\pi d^2} = \sigma_s \left[1 + \frac{md}{3h} \right] + \sigma_k .$$

Для определения напряжения σ_k предположим, что кольцевая часть заготовки не испытывает осевой деформации, т.е. $\varepsilon_z = 0$. В этом случае уравнение равновесия запишется в виде

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad (5.10)$$

а условие текучести

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \sigma_s . \quad (5.11)$$

Решая совместно уравнения (5.10) и (5.11), определяем постоянную интегрирования из условия, что при $r = D/2$, $\sigma_r = 0$. Найдем

$$\sigma_r = -\sigma_s \ln \frac{D}{2r}.$$

Величину σ_k определим, полагая $r = d/2$ и $\sigma_r = -\sigma_k$:

$$\sigma_k = \sigma_s \ln \frac{D}{d}.$$

Окончательно удельное усилие открытой прошивки

$$p_{cp} = -\sigma_s \left(1 + \frac{md}{3h} - \ln \frac{D}{d} \right).$$

Задача 5.6. Определить усилие закрытой прошивки плоским пуансоном (рис. 5.4). На границе контакта материала заготовки и инструмента справедлив закон Прандтлева трения.

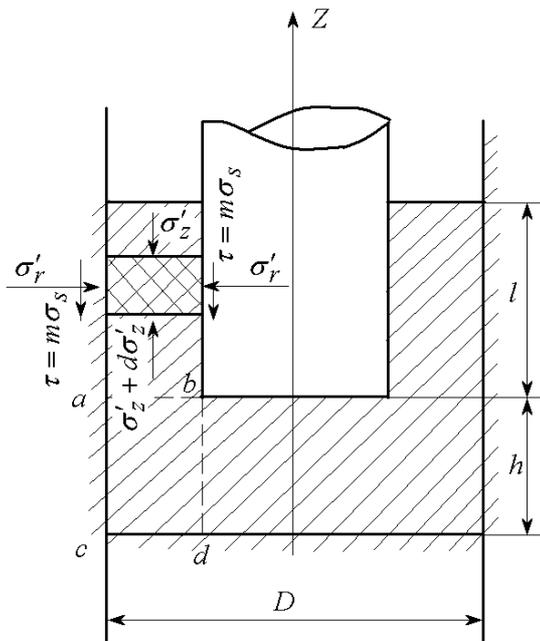


Рис. 5.4

Решение. Предполагаем, что при движении пуансона происходит осаживания металла, находящегося под непосредственным воздействием пуансона, в результате чего металл затекает в кольцевую полость между стенками матрицы и пуансона.

Решая задачу аналогично предыдущей, получаем выражение для удельного усилия процесса:

$$p_{cp} = -\sigma_s \left(1 + \frac{md}{3h} \right) + \sigma_{\psi},$$

где σ_{ψ} - напряжение, возникающее на границе кольцевой и цилиндрической частей и препятствующее осаживанию последней.

Условие текучести для кольцевой части может быть записано следующим образом:

$$\sigma'_z - \sigma'_r = \sigma_s,$$

где σ'_z и σ'_r - напряжения, действующие в кольцевой полости.

Условно допускаем равномерное распределение этих напряжений в области a, b, c, d . Тогда напряжение σ'_z определит сопротивление, которое необходимо преодолеть для продвижения металла в кольцевой части полости.

Выделив в кольцевой части бесконечно малый элемент и приняв условие постоянства силы трения

$$\tau = m \sigma_s,$$

получим уравнение равновесия бесконечно малого элемента:

$$\frac{d\sigma'_z}{dz} \pi \frac{(D^2 - d^2)}{4} - \pi \sigma_s m (d + D) dz = 0$$

или

$$d\sigma'_z = 4\sigma_s m \frac{dz}{D - d}. \quad (5.12)$$

Проинтегрировав уравнение (5.12), получим

$$\sigma'_z = 4\sigma_s m \frac{z}{D - d} + c.$$

Из условия, что на свободной поверхности металла $\sigma_z = 0$, найдем произвольную постоянную

$$c = -4\sigma_s m \frac{l}{D - d};$$

$$\sigma'_z = -4\sigma_s m \frac{l - z}{D - d}. \quad (5.13)$$

Сопротивление кольцевой части заготовки определим из выражения (5.13), полагая $z = 0$.

Тогда из условия текучести имеем

$$\sigma'_r = \sigma_y = \sigma'_z - \sigma_s = -4\sigma_s m \frac{l}{D - d} - \sigma_s.$$

Окончательное удельное усилие закрытой прошивки будет

$$p_{cp} = \sigma_s \left(2 + \frac{\mu d}{3h} + 4m \frac{l}{D - d} \right).$$

Задача 5.7. Определить удельное усилие волочения полосы через клиновую матрицу с малым углом раствора 2α при условии трения Кулона на контактной поверхности (коэффициент трения μ мал).

Решение. Составим приближенное уравнение равновесия элемента деформируемого тела, выделенного двумя плоскими сечениями и шириной, равной 1 (рис. 5.5):

$$(\sigma_{xx} + d\sigma_{xx})(h + dh)l - \sigma_{xx}hl + 2p \frac{dx}{\cos \alpha} \sin \alpha + 2\mu p \frac{dx}{\cos \alpha} \cos \alpha = 0$$

или

$$\sigma_{xx}dh + hd\sigma_{xx} + 2p(tg\alpha + \mu)dx = 0.$$

Учитывая, что

$$dx = \frac{dh}{2tg\alpha},$$

находим

$$\sigma_{xx}dh + hd\sigma_{xx} + p(1 + \mu ctg\alpha)dh = 0. \quad (5.14)$$

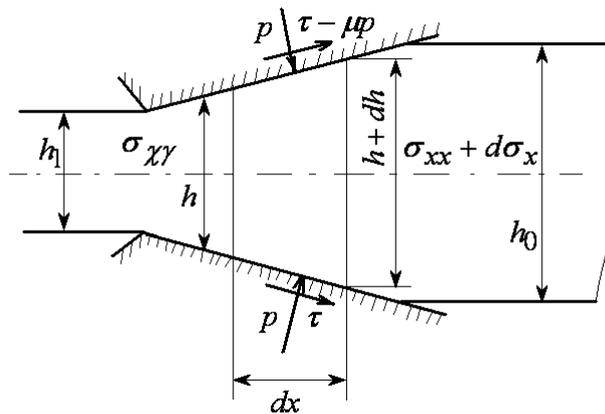


Рис. 5.5

Если угол матрицы и коэффициент трения малы, то можно приближенно считать, что

$$\sigma_{xx} = \sigma_1, p = -\sigma_2. \quad (5.15)$$

Тогда условие пластичности для плоского деформированного состояния можно записать так:

$$\sigma_{xx} + p = 2k.$$

Исключив p из соотношения (5.14) с помощью условий (5.15) и разделив переменные, найдем

$$\frac{d\sigma_{xx}}{\sigma_{xx} - 2k \left[\frac{tg\alpha}{\mu} + 1 \right]} = \mu ctg\alpha \frac{dh}{h}. \quad (5.16)$$

После интегрирования уравнения (5.16) с последующим его потенцированием получим

$$\sigma_{xx} = 2k \left(1 + \frac{tg\alpha}{\mu} \right) + c h^{\mu c tg\alpha}. \quad (5.17)$$

Константу интегрирования определим из граничных условий при $h = h_0$, $\sigma_{xx} = 0$, т.е.

$$0 = 2k \left(1 + \frac{tg\alpha}{\mu} \right) + c h_0^{\mu c tg\alpha}. \quad (5.18)$$

Умножим уравнение (5.18) на величину $\left(\frac{h}{h_0} \right)^{\mu c tg\alpha}$, вычтем его из соотношений (5.17) и получим

$$\sigma_{xx} = 2k \left(1 + \frac{tg\alpha}{\mu} \right) \left[1 - \left(\frac{h}{h_0} \right)^{\mu c tg\alpha} \right]. \quad (5.19)$$

Удельное усилие волочения определим с помощью выражения (5.19) после подстановки в него $h = h_1$:

$$\sigma_{xx} = 2k \left(1 + \frac{tg\alpha}{\mu} \right) \left[1 - \left(\frac{h_1}{h} \right)^{\mu c tg\alpha} \right]. \quad (5.20)$$

Отметим, что если волочение полосы осуществляется в матрице без трения, т.е. $\mu = 0$, то по выражению (5.20) после раскрытия неопределенности типа $0/0$ можно найти удельное усилие процесса:

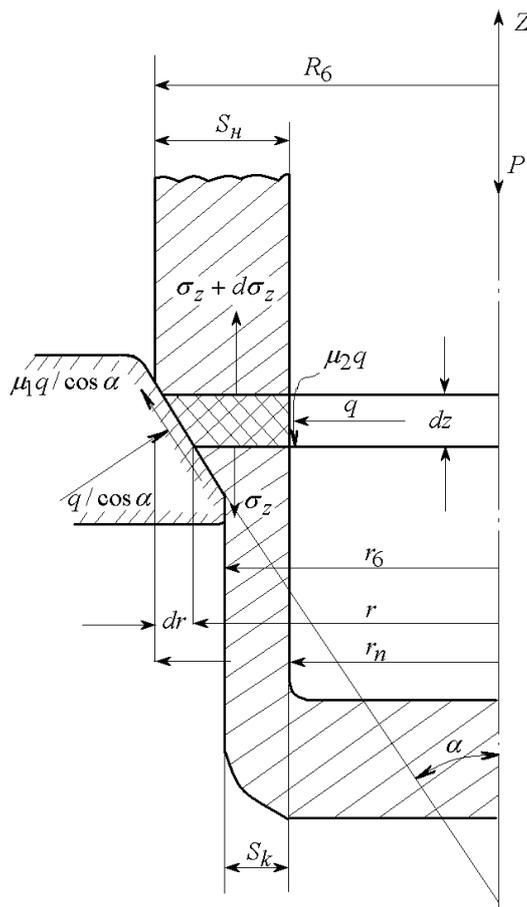


Рис. 5.6

$$\sigma_{xx} = 2k \ln \frac{h_0}{h_1}.$$

Оно по величине равно идеальной работе пластической деформации изменения размеров полосы.

Задача 5.8. Определить удельное усилие процесса вытяжки с утонением стенки цилиндрического стакана через коническую матрицу с углом 2α (рис. 5.6). В результате деформации начальная толщина стенки стакана S_H изменяется до размера S_K .

Решение. Предполагаем, что горизонтальные составляющие радиальных сжимающих напряжений q от реактивных сил на контактных поверхностях матрицы и пуансона принимаются одинаковыми по величине.

Тогда уравнение равновесия элементарного кольцевого участка, расположенного в очаге деформации, запишется в виде

$$(\sigma_z + d\sigma_z) \left[\pi(r^2 - r_n^2) + 2\pi r dr \right] - \pi \sigma_z (r^2 - r_n^2) + \frac{2\pi q r dr}{\cos \alpha} + \frac{2\pi \mu_1 q r dr}{\sin \alpha} - \frac{2\pi \mu_2 r_n q dr}{\operatorname{tg} \alpha} = 0,$$

где μ_1 и μ_2 - коэффициенты трения на внешней и внутренней поверхностях полуфабриката.

Проведя преобразования, получим

$$2\sigma_z r dr + (r^2 - r_n^2) d\sigma_z + 2q r dr \left[\frac{1}{\cos \alpha} - \frac{\mu_1}{\sin \alpha} - \frac{\mu_2 r_n}{r \operatorname{tg} \alpha} \right] = 0. \quad (5.21)$$

Без большой погрешности можно произвести следующую замену:

$$r = r_{cp} = \frac{R_6 - r_6}{2} = r_n m_n; \quad m_n = 1 + \frac{S_H + S_K}{2r_n}.$$

Введя обозначение

$$A = \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{\mu_1}{\sin \alpha} - \frac{\mu_2}{m_n \operatorname{tg} \alpha}, \quad (5.22)$$

преобразуя уравнение (5.21) к виду

$$2\sigma_z r dr + (r^2 - r_n^2) d\sigma_z + 2q A r dr = 0. \quad (5.23)$$

Считая угол матрицы малым, а коэффициент трения умеренным, можно приближенно принять

$$q = -\sigma_2, \quad \sigma_z = \sigma_1.$$

Тогда из условия текучести получим

$$q = 2k - \sigma_z. \quad (5.24)$$

Подставив выражение (5.24) в равенство (5.23), найдем

$$2\sigma_z (1 - A) r dr + (r^2 - r_n^2) d\sigma_z - 4Ak r dr = 0. \quad (5.25)$$

Проинтегрируем уравнение (5.25) при условии, что на верхней границе очага деформации $\sigma_z = 0$. В этом случае

$$\int_{r_B}^{R_B} \frac{2r dr}{r^2 - r_n^2} = \int_0^{\sigma_z} \frac{d\sigma_z}{(A-1)\sigma_z - 2kA}; \quad \ln \frac{R_B^2 - r_n^2}{r_B^2 - r_n^2} = \frac{1}{A-1} \ln \frac{(A-1)\sigma_z - 2kA}{-2kA}.$$

Тогда рабочее напряжение определим по формуле

$$\sigma_z = \frac{2Ak}{A-1} \left[1 - \left(\frac{R_B^2 - r_n^2}{r_B^2 - r_n^2} \right)^{A-1} \right].$$

Тема 6. Метод линий скольжения (характеристик)

План

- 6.1. Сущность метода
- 6.2. Примеры решения задач

6.1. Сущность метода

Метод линий скольжения включает в себя построение сетки линий скольжения (характеристик) и на основе их свойств определение поля напряжений, скоростей, установление границ пластической области, нахождение усилий.

В условиях плоской деформации для построения сетки линий скольжения и определение напряжений и усилий основными являются следующие соотношения:

уравнения линий скольжения и соотношения вдоль них:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi ; \frac{\sigma}{2k} - \varphi = 0 \quad \text{вдоль } \alpha - \text{ линии;} \\ \frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg} \varphi ; \frac{\sigma}{2k} + \varphi = \eta \quad \text{вдоль } \beta - \text{ линии} \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

и выражения для компонент напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma - k \sin 2\varphi ; \\ \sigma_y &= \sigma + k \sin 2\varphi ; \\ \tau_{xy} &= k \cos 2\varphi , \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

где σ_x , σ_y , τ_{xy} , σ - компоненты напряжений и среднее напряжение; φ - отсчитываемый против часовой стрелки угол между положительным направлением оси x и касательной к α - линии; k - пластическая постоянная материала.

За α - линию скольжения принимается линия скольжения касательная к которой образует с осью α угол $\varphi = \theta - \pi/4$, где θ - угол между первым главным напряжением σ_1 и осью x .

Кинематика течения материала в пластической области определяется соотношением Гейрингер между компонентами скоростей вдоль линий скольжения:

$$\left. \begin{aligned} du - v d\varphi = 0 \quad \text{вдоль } \alpha - \text{ линии;} \\ dv + u d\varphi = 0 \quad \text{вдоль } \beta - \text{ линии;} \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

где u , v - компоненты скорости вдоль α - и β - линий скольжения.

Решим несколько задач с использованием метода линий скольжения.

6.2. Примеры решения задач

Задача 6.1. Определить величину внутреннего давления p , необходимо для начала пластической деформации длинной толстостенной трубы.

Решение. Пренебрегая деформацией в осевом направлении, принимаем, что труба находится в условиях плоского деформированного состояния. Вследствие осевой симметрии приложения внешних нагрузок к поперечному сечению трубы радиальное σ_ρ и тангенциальное напряжение σ_θ будут главными, а траектории их будут представлять собой сетку радиусов и ортогональных им окружностей (рис. 6.1, а, правая сторона). Линии скольжения наклонены к траекториям главных напряжений под углом 45° , и поэтому пересекают каждый в своей точке луч, выходящий из центра под углом 45° .

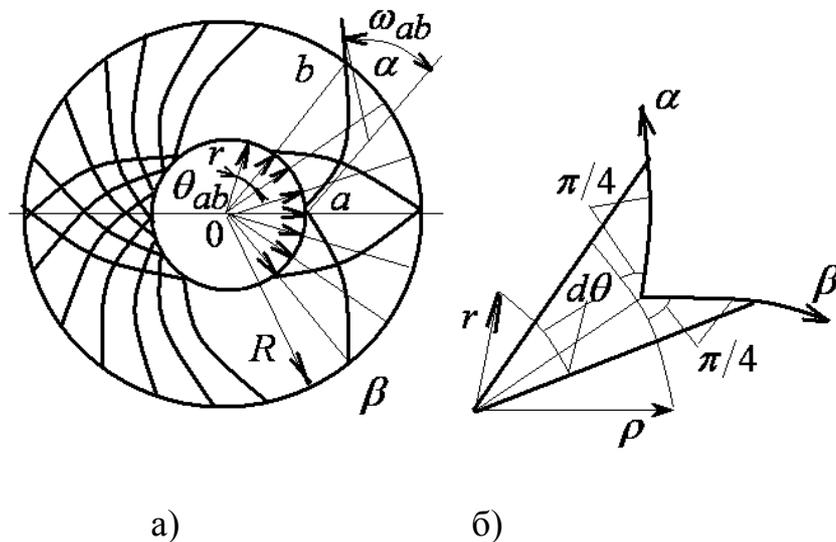


Рис. 6.1.

Для бесконечно малого элемента (рис. 6.1,б) имеем

$$d\rho = \pm \rho d\theta, \quad (6.4)$$

причем знак «+» относится к α -линии, а знак «-» к β -линии.

Интегрируя соотношение (6.4), получаем уравнение двух семейств линий скольжения:

$$\rho = A e^{\pm\theta},$$

которые являются логарифмическими спиралями.

В этом случае поле линий скольжения будет представлять собой сетку, образованную логарифмическими спиралями (рис. 6.1, а, левая сторона). Так как линии скольжения наклонены к радиусам под постоянным углом, то угол поворота касательной к линии скольжения при переходе от точки a к точке b равен углу поворота радиуса вектора, т.е. $\theta_{ab} = \omega_{ab}$.

Из уравнения - линии скольжения следует, что

$$\theta_{ab} = \theta_b - \theta_a = \omega_{ab} = \ln \frac{R}{r}.$$

На основании соотношения (6.1) можно записать:

$$\sigma_a - \sigma_b = 2k(\theta_a - \theta_b) = -2k \ln \frac{R}{r}$$

и
$$\sigma_a = \sigma_b - 2k \ln \frac{R}{r}.$$

Учитывая, что точка b лежит на свободной поверхности, т.е. $(\sigma_\rho)_b = 0$, из условия пластичности $(\sigma_\theta)_b - (\sigma_\rho)_b = 2k$ находим

Тогда
$$\sigma_b = \frac{(\sigma_\rho)_b + (\sigma_\theta)_b}{2} = k$$

и

$$\sigma_a = k - 2k \ln \frac{R}{r} \quad (6.5)$$

С другой стороны,

$$\sigma_a = \frac{-p + (\sigma_\theta)_a}{2}.$$

Исключая $(\sigma_\theta)_a$ с использованием условия пластичности $(\sigma_\theta)_a = 2k - p$, найдем

$$\sigma_a = -p + k. \quad (6.6)$$

Приравнявая выражение (6.5) и (6.6), определяем

$$p = 2k \ln \frac{R}{r}.$$

Задача 6.2. Определить давление, необходимое для начала пластической деформации, при сжатии параллелепипеда плоскими параллельными идеально гладкими плитами.

Решение. В тех случаях, когда длина параллелепипеда значительно больше его ширины b и высоты h , деформацию можно считать плоской. Поскольку сжатие осуществляется идеально гладкими плитами, на контактных границах касательные напряжения отсутствуют и, следовательно, контактные границы являются главными площадками, линии скольжения, к которым подходят под углом $\pi/4$ (рис. 6.2). На свободной поверхности (точка m) первое главное нормальное напряжение $(\sigma_1)_m = (\sigma_x)_m = 0$. Согласно условию пластичности $(\sigma_1)_m - (\sigma_3)_m = 2k$ получим, что второе главное напряжение в этой точке $(\sigma_3)_m = (\sigma_y)_m = -2k$. Среднее нормальное напряжение в точке m определяется так:

$$(\sigma)_m = \frac{(\sigma_1)_m + (\sigma_3)_m}{2} = -k.$$

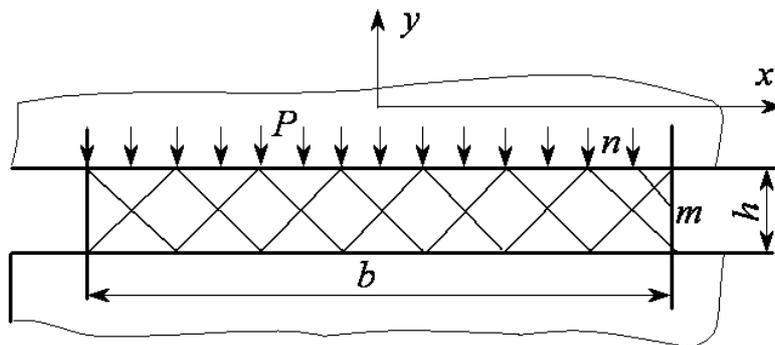


Рис. 6.2.

При переходе вдоль линии скольжения от точки m к точке n , среднее напряжение остается неизменным, так как линия прямая, следовательно, $(\sigma)_m = (\sigma)_n$. Тогда в точке n среднее напряжение $(\sigma)_n = -k$, и по условию пластичности $(\sigma_x)_n - (\sigma_y)_n = 2k$.

Решая систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x)_n + (\sigma_y)_n &= -2k, \\ (\sigma_x)_n - (\sigma_y)_n &= 2k, \end{aligned} \right\}$$

получаем

$$(\sigma_x)_n = 0; \quad (\sigma_y)_n = -2k.$$

Из условия равновесия определим давление, необходимое для начала деформации:

$$p = -(\sigma_y)_n = 2k .$$

Задача 6.3. Определить давление, для начала пластической деформации, при вдавливании идеально гладкого штампа в основание полости поковки (рис. 6.3).

Решение. В плоскости рисунка деформацию считаем плоской. Конфигурация полости поковки размерами b и γ . Поскольку на свободных поверхностях контактной границы нет касательных напряжений (штамп идеально гладкий), то линии скольжения должны подходить к ним под углом $\pi/4$. на свободной поверхности (точка m) первое главное нормальное напряжение $(\sigma_1)_m = (\sigma_N)_m = 0$.

Согласно условию пластичности $(\sigma_1)_m - (\sigma_3)_m = 2k$ получим, что второе главное напряжение в этой точке $(\sigma_3)_m = (\sigma_y)_m = -2k$. Среднее напряжение в этой точке m

$$(\sigma)_m = \frac{(\sigma_1)_m + (\sigma_3)_m}{2} = -k .$$

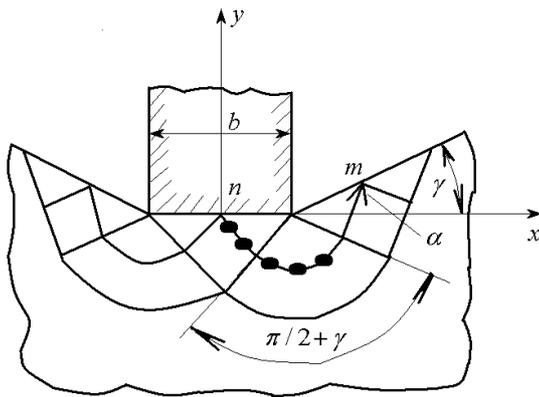


Рис. 6.3.

При переходе вдоль линии скольжения от точки m к точке n среднее напряжение согласно свойствам линий скольжения изменится на величину, пропорциональную углу поворота линии скольжения:

$$(\sigma)_m - (\sigma)_n = 2k \varphi_{mn} .$$

В данном случае

$$\varphi_{mn} = \frac{\pi}{2} + \gamma .$$

Поэтому в точке n среднее напряжение

$$(\sigma)_n = \frac{(\sigma_x)_n + (\sigma_y)_n}{2} = \sigma_m - 2k \varphi_{mn} = -k - 2k \left(\frac{\pi}{2} + \gamma \right) .$$

По условию пластичности

$$(\sigma_x)_n - (\sigma_y)_n = 2k .$$

Решая систему уравнений

Решение. Обозначим силу, приходящуюся на единицу длины штампа в направлении, перпендикулярном чертежу (в направлении оси z), P , а скорость движения штампа V .

Рассмотрим вначале решение этой задачи, данное Прандтлем (рис. 6.5).

Очевидно, пластические области начинают образовываться в точках A и B сразу же после приложения нагрузки к штампу. Однако жесткость тела между двумя местными пластическими областями в окрестностях точек A и B вначале исключает вдавливание штампа. Вдавливание будет происходить только после того, как нагрузка на штамп достигнет значения, необходимого для создания развитой пластической области вдоль всего основания штампа.

После того как произойдет вдавливание, материал, выдавленный штампом, образует по сторонам возвышения. Таким образом, при развитом пластическом течении необходимо удовлетворять краевым условиям на деформированной поверхности.

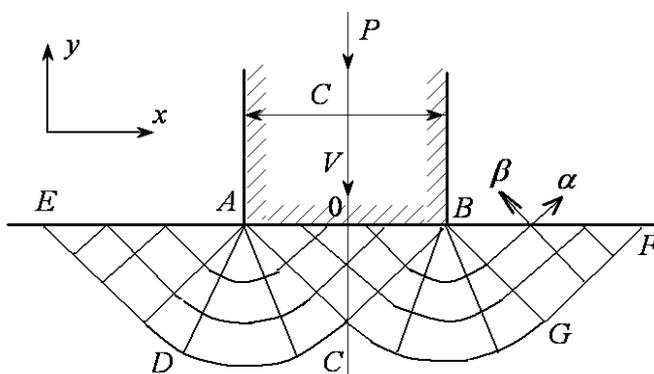


Рис. 6.5.

Ограничимся рассмотрением только начального пластического течения. В этом случае в решении задач могут удовлетворяться граничные условия на недеформированной поверхности.

Начнем построение поля напряжений со свободной поверхности слева от штампа. Некоторый ее участок AE должен быть пластическим, чтобы возникла возможность образования выступа над поверхностью. Поскольку поверхность свободна от нагрузок, то

$$\sigma_y = 0, \tau_{xy} = 0.$$

По условию текучести

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2.$$

Для точек этой поверхности получаем

$$\sigma_x = -2k .$$

Знак минус взят потому, что в направлении AE возникает сжатие.

Поскольку касательные напряжения на свободной поверхности равны нулю, линии скольжения пересекают ее под углом 45^0 и 135^0 . Так как σ_x постоянно, следовательно, и σ , а также φ постоянны вдоль линии AE , то параметры ξ и η вдоль этой линии тоже не изменяются, поэтому под линией AE поле напряжений равномерное.

Если конечная точка E пластического участка свободной поверхности была бы известна, то тогда было бы определено равномерное поле напряжений под линией AE . Оно представляло бы собой равнобедренный прямоугольный треугольник ADE .

Так как линия скольжения AD прямая, то, следовательно, семейство линий скольжения справа от AD прямое. Учитывая симметрию задачи, заключаем, что под штампом поле напряжений ABC равномерное и, следовательно, давление под штампом постоянно.

Два равномерных поля напряжений соединены между собой центрированным полем ADC . Следовательно, линия скольжения α в поле AED является прямой, затем в поле ADC переходит в дугу окружности, которая, в свою очередь, в поле ABC - в прямую. Отсюда следует, что длина пластического участка свободной поверхности равна ширине штампа:

$$AE = AB = c .$$

Вдоль линий скольжения α параметр ξ постоянен. В области ABC линии скольжения α наклонены к оси x под углом

$$\varphi = -\frac{\pi}{4} ,$$

поэтому вдоль них

$$\frac{\sigma}{2k} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} - 0,5 .$$

Отсюда

$$\sigma = -k(\pi + 1) .$$

Подставляя значения σ и φ в формулы (6.2), имеем

$$\sigma_x = -\pi k ; \sigma_y = -2k \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right) .$$

Поскольку напряжения σ_y вдоль линии AB не изменятся, сила, вдавливающая штамп, определится так:

$$P_k = \sigma_y c = 2k \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right).$$

Установим распределение скоростей. Очевидно, треугольник ABC движется со скоростью штампа V вниз как жесткое целое. Вдоль линии AC касательная составляющая скорости разрывна, а нормальная равна $V\sqrt{2}/2$. Вдоль линии CD касательная составляющая скорости разрывна, а нормальная равна нулю. В центрированном поле скорость в направлении линии скольжения β равна $V\sqrt{2}/2$, а вдоль линии скольжения α - нулю. Область ADE скользит как твердое тело в направлении DE со скоростью $V\sqrt{2}/2$.

Рассмотрим теперь решение, данное Хиллом. Хилл показал, что решение Прандтля не является единственным, и предложил поле скольжения, изображенное на (рис. 6.6). Оно состоит из двух равномерных полей напряжений AOC и AED , соединенных центрированным полем ADC . В этом случае длина пластического участка свободной поверхности равна половине ширины штампа, т.е. $1/2c$.

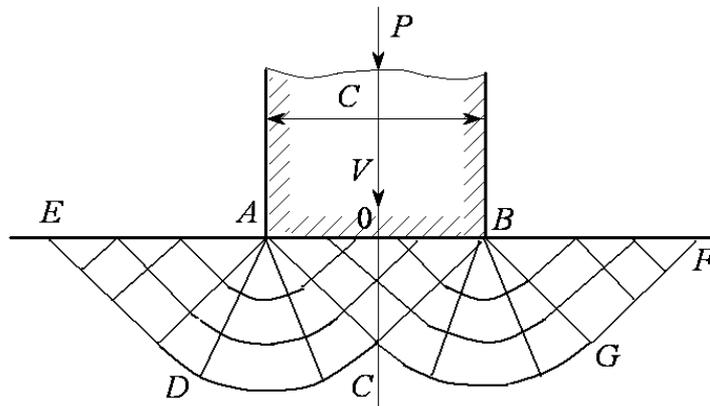


Рис. 6.6.

Напряжение в равномерных полях напряжений и центрированном поле те же, что и в соответствующих полях в решении Прандтля. Поэтому и сила, приложенная к штампу, будет той же. Но поле скоростей иное, чем предыдущем решении. Треугольник AOC скользит как твердое тело вдоль линии OC со скоростью $V\sqrt{2}$. Скорость на линии AC непрерывна. В центрированном поле скорость в направлении линии скольжения β равна $V\sqrt{2}$, а вдоль линии скольжения α - нулю. Треугольник ADE движется в направлении линии ADE со скоростью $V\sqrt{2}$.

Из рассмотренной задачи следует, что при использовании схемы идеально пластического тела возможна неоднозначность решений, поэтому при построении полей линий скольжений и полей скоростей следует привлекать экспериментальные данные.

Задача 6.6. Определить давление, необходимое для плоского прессования через прямую матрицу ($\alpha = 90^0$) с обжатием $r = 0,5$.

Решение. Рассмотрим схему процесса и поле линий скольжения (рис. 6.7). Примем (в соответствии с экспериментом), что в углах матрицы образуются жесткие треугольные зоны. Считаем, что трение на контактной поверхности между заготовкой и контейнером отсутствует. Поле линий скольжений состоит из двух центрированных вееров. Поскольку величина $r = 1/2$, угол AOB равен углу $OA'B'$ и 90^0 , отрезки AO , $A'O$, $A'B'$, AB равны между собой.

Выясним, насколько предложенное поле линий скольжений удовлетворяет граничным условиям в напряжениях. Во-первых, отметим, что из-за отсутствия трения линии AB и $A'B'$ должны подходить к стенке контейнера под углом 45^0 (как показано на рис. 6.7). Во-вторых, из-за принятых жестких зон линии AB и $A'B'$ должны быть линиями скольжения.

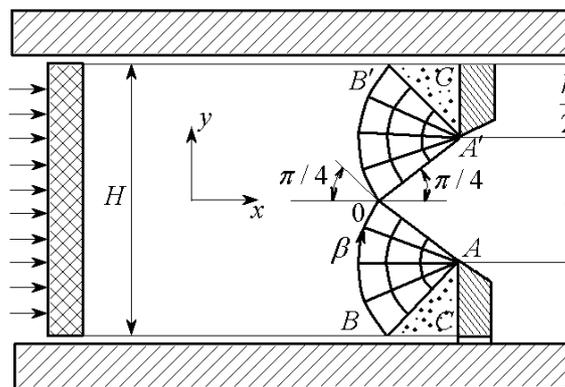


Рис. 6.7.

Наконец, горизонтальная плоскость симметрии является главной плоскостью, на которой отсутствуют сдвиги, поэтому граничные линии вееров должны пересекать горизонтальную ось симметрии под углом 45^0 . Таким образом, принятое поле линий скольжений удовлетворяет граничным условиям в напряжениях, распределение напряжений можно найти из соотношений вдоль характеристик (6.1).

Исходным для определения поля напряжений является то обстоятельство, что результирующее осевое усилие, действующее на границе $A'O A$, отсутствует, если полоса справа от этой границы находится в равновесии. Рассмотрим сектор AOB , показанный на (рис. 6.7). Согласно уравнениям (6.1) напряжений вдоль прямой линии AO и других радиальных линий не изменяются. Поскольку усилие на границе AO равно нулю, то вдоль нее напряжение $(\sigma_x)_{AO} = 0$. Кроме того, поскольку α - линия AO пересекает ось α под углом $\varphi_0 = -\pi/4$, то напряжение $\tau_{xy} = 0$. Таким образом, справедливы соотношения

$$(\sigma_x)_{AO} = 0; (\sigma_y)_{AO} = -2k; (\sigma)_{AO} = (\sigma)_O = -k.$$

Согласно соотношениям вдоль β - характеристики OB

$$\sigma_0 + 2k\varphi_0 = \sigma + 2k\varphi = const.$$

Отсюда

$$\sigma = \sigma_0 + 2k(\varphi_0 - \varphi) = -k\left(1 + \frac{\pi}{2} + 2\varphi\right).$$

Среднее давление на α - линии AB тогда будет следующим:

$$(\sigma)_{AB} = (\sigma)_B = -k \left[1 + \frac{\pi}{2} + 2(\varphi)_B \right] = -k \left[1 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right] = -k(1 + \pi),$$

поскольку $(\varphi)_{AB} = (\varphi)_B = \frac{\pi}{4}$. Компоненты тензора напряжений на AB найдем по формулам (6.2):

$$\begin{aligned} (\sigma_x)_{AB} &= (\sigma)_{AB} - k \sin 2(\varphi)_{AB} = -k(2 + \pi); \\ (\sigma_y)_{AB} &= (\sigma)_{AB} + k \sin 2(\varphi)_{AB} = -k\pi; \\ (\tau_{xy})_{AB} &= k \cos 2(\varphi)_{AB} = 0. \end{aligned}$$

Усилие прессования (действующее, на рис. 6.7 слева) уравнивается противоположно направленным усилием, которое передается через границу $BAOA'B'$. Поскольку результирующее усилие через границу AOA' отсутствует, то уравнивающее усилие создается за счет действия напряжения $(\sigma_x)_{AB}$ на плоскостях матрицы AC и AC' , поэтому

$$pH = (\sigma_x)_{AB}(H - h)$$

или

$$p = r(\sigma_x)_{AB},$$

где

$$r = 1 - \left(\frac{h}{H} \right).$$

Для процесса прессования, показанного на (рис. 6.7), $r = 1/2$, поэтому давление p определяется по формуле

$$p = -k \left(1 + \frac{\pi}{2} \right).$$

Задача 6.7. Определить давление, необходимое для плоского прессования через гладкую прямую матрицу с обжатием $r = 2/3$.

Решение. Поле линий скольжения для такого процесса показано на рис. 6.8.

Часть поля АОА'В'ОВ была приведена для задачи 6 при обжатии $r = 1/2$. Однако в области АВС и А'В'С' теперь представляют собой не жесткие зоны, а области равномерного напряженного состояния. Как и в задаче 6, всюду на линиях АВ и А'В' напряжение $\sigma = -k(1 + \pi)$, поэтому вдоль линий АВ и А'В' $\sigma_x = -k(2 + \pi)$. В областях АВС и А'В'С' линии скольжения прямые, поэтому напряжение не изменно по плоскости матрицы, где $(\sigma_x)_{AC, A'C'} = -k(2 + \pi)$.

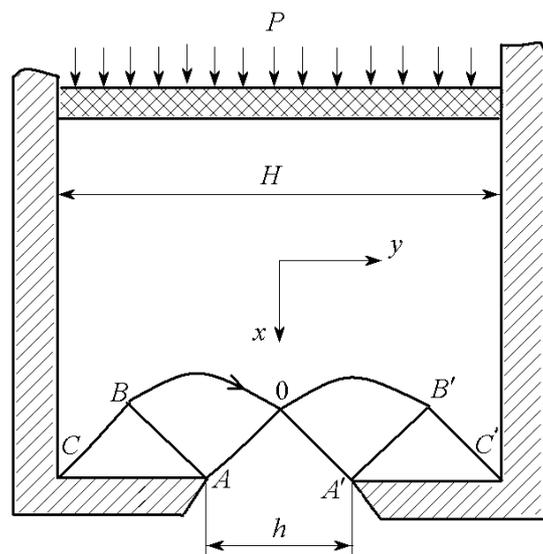


Рис. 6.8.

Аналогично задаче 6 по условию равновесия

$$pH = (\sigma_x)_{AC, A'C'}(H - h); \quad p = r(\sigma_x)_{AC, A'C'}$$

Следовательно, для данного случая, когда $r = 2/3$

$$p = \frac{2}{3}(\sigma_x)_{AC} = -\frac{4}{3}k\left(1 + \frac{\pi}{2}\right).$$

Задача 6.8. Определить удельное усилие, волочения полосы t через гладкую матрицу под углом Θ и давление на матрицу q при обжатии r .

Решение. Для поля, показанного на рис. 6.9, справедливо следующее геометрическое соотношение:

$$r = 1 - \frac{h}{H} = \frac{2 \sin \Theta}{1 + 2 \sin \Theta}.$$

В треугольных областях АВС и А'В'С' имеет место равномерное напряженное состояние. Так как усилие волочения равно продольному компоненту силы давления на матрицу, то

$$q(H - h) = th \text{ или } q = t \frac{1 - r}{r}.$$

Учтем, что вдоль АО и ОА' компоненты напряжений постоянны.

В частности, $\sigma_{xAO} = t$, $\tau_{xy} = 0$. С другой стороны, в соответствии с выражениями (6.2), имеем

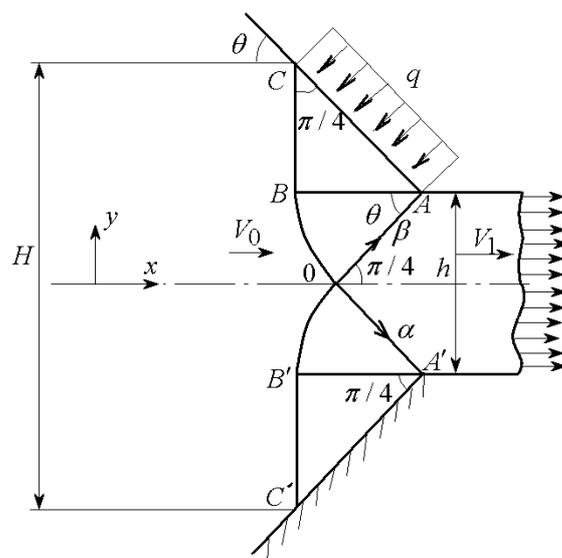


Рис. 6.9.

$$\sigma_{xAO} = \sigma_0 - k \sin 2\varphi_0 = \sigma_0 + k ,$$

так как

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{4} .$$

Определим среднее напряжение в точке B с использованием выражений (6.1):

$$\sigma_B = \sigma_0 + 2k(\varphi_B - \varphi_0) = \sigma_0 - 2k\Theta .$$

Известно, что нормальное давление на матрицу связано со средним напряжением и углом φ соотношением

$$q = -\sigma_n = -\sigma_B + k \sin 2(\varphi_B - \Theta) ,$$

где ψ - угол между нормалью к образующей матрицы и осью x .

В нашем случае на линии AC

$$\varphi_B = -\frac{\pi}{4} - \Theta ; \psi = \frac{\pi}{2} - \Theta ,$$

поэтому

$$q = -\sigma_B + k = -\sigma_0 + 2k\Theta + k = -t + 2k(1 + \Theta) .$$

Учитывая, что $q = t \frac{1-r}{r}$, определяем значения $\frac{t}{2k}$ и $\frac{q}{2k}$:

$$\frac{t}{2k} = (1 + \Theta)r ; \frac{q}{2k} = \frac{1 + \Theta}{1 + 2 \sin \Theta} .$$

Подставим в предыдущие выражения $r = \frac{2 \sin \Theta}{1 + 2 \sin \Theta}$.

Окончательно получим

$$\frac{t}{2k} = \frac{2(1 + \Theta) \sin \Theta}{1 + 2 \sin \Theta} ; \frac{q}{2k} = \frac{1 + \Theta}{1 + 2 \sin \Theta} .$$

Задача 6.9. Определить удельное усилие обратного выдавливания в условиях плоской деформации гладким инструментом с обжатием $r = 0,5$.

Решение. На рис. 6.10 показано поле линий скольжения, соответствующее данному случаю.

Так как на линии ОВ

$$\sigma_x = 0, \varphi_B = -\frac{\pi}{4},$$

то

$$\sigma_B = -k.$$

Используя соотношение (6.1) вдоль α - линии, найдем σ_c , учитывая что

$$\varphi_c = -\frac{3}{4}\pi;$$

$$\sigma_c = \sigma_B - 2k(\varphi_B - \varphi_c) = -k(1 + \pi).$$

На основании формул (6.2) имеем

$$\sigma_{xc} = \sigma_c - k \sin 2\varphi_c = -k(1 + \pi) - k = -2k\left(1 + \frac{\pi}{2}\right).$$

Тогда удельное усилие процесса

$$q = -\sigma_{xc} = 2k\left(1 + \frac{\pi}{2}\right).$$

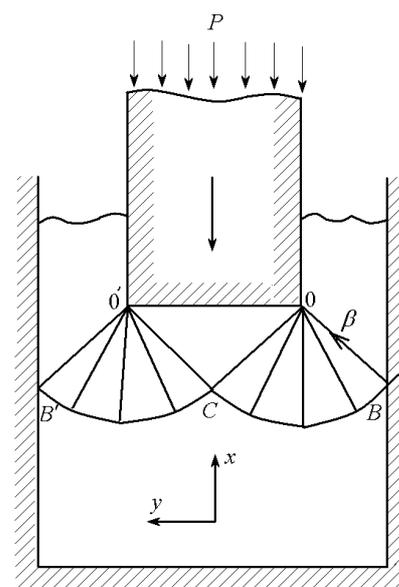


Рис. 6.10.

Тема 7. Метод верхних оценок

План

7.1. Подход к анализу процессов обработки металлов давлением

7.2. Примеры решения задач

7.1. Подход к анализу процессов обработки металлов давлением

Для несжимаемой сплошной среды, находящейся в равновесии, при условии, что объемные силы отсутствуют, справедливо энергетическое уравнение

$$\int_{(s)} X_{ni} v_i dS = \int_{(V)} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV + \int_{(S_p)} \tau [v_\tau] dS_p, \quad (7.1)$$

где σ_{ij} и ε_{ij} - тензоры напряжений и скоростей деформаций; X_n - поверхностные силы; v_i - скорости; S - поверхность, охватывающая объем; S_p - поверхность разрыва скорости; $[v_\tau]$ - разрыв касательной составляющей скорости; τ - касательное напряжение на поверхности разрыва.

В некоторых случаях (например, при плоском напряженном состоянии) возможен разрыв нормальной составляющей скорости $[v_n]$, что учитывается добавлением в правую часть энергетического уравнения слагаемого

$$\int_{(S_p)} \sigma [v_n] dS_p, \quad (7.2)$$

где σ - нормальное напряжение на поверхности разрыва. В левой части уравнения находится выражение мощности поверхностных сил, в правой - выражение мощности деформации.

Левая часть уравнения (7.1) соответствует мощности внешних сил N_e , а правая часть - мощность пластической деформации N_i .

Если поверхность пластичности выпуклая, а поведение среды подчиняется ассоциированному закону течения, то справедлива теорема, в соответствии с которой мощность деформации достигает абсолютного минимума для действительного поля скоростей. Отсюда следует, что для любого кинематически допустимого поля скоростей мощность деформации выше. Чем удачнее выбранное данное поле, тем ближе верхняя оценка мощности к действительному значению.

Метод расчета усилий и мощностей с помощью кинематически допустимых полей скоростей известен под названием метода верхних оценок.

Использование модели жесткопластического тела приводит к тому, что выбираемое кинематически возможное поле скоростей неизменно содержит разрывы скоростей, по крайней мере, на поверхностях разделяющих жесткие и пластические области деформируемого тела. Вследствие этого применение разрывных полей скоростей в последнее время получило широкое распространение для построения верхнеоценочного решения. Деформируемое тело (его пластическая область) разбивается на блоки, внутри каждого из которых задается

удовлетворяющее граничным условиям и условию несжимаемости распределение скоростей.

Значительное упрощение может быть достигнуто при анализе задач плоской деформации, когда можно осуществить разбиение деформированного тела на жесткие блоки и рассматривать только их относительное перемещение, т.е. предположить, что деформация внутри блоков не происходит и имеет место только на линиях разрыва скоростей на границах блоков.

Такой подход позволяет определить мощность плоского формоизменения как сумму мощностей касательных напряжений на линиях разрыва скоростей

$$N_i = \sum l_{ij} \tau_{ij} [v_{ij}] \quad (7.3)$$

Контактные границы инструмента и материала также рассматриваются как линии разрыва скорости, на которых действует касательное напряжение $\tau_k = mk$, m - коэффициент прандлева трения. В соотношении (7.3) принимается $|\tau_{ij}| = k$.

Рассмотрим применение метода верхних оценок при решении ряда задач.

7.2. Примеры решения задач

Задача 7.1. Найти усилие осадки пластически однородной полосы между двумя жесткими плитами, сближающимися со скоростями v_1 . Известны размеры полосы b и h , а также предел текучести материала полосы при сдвиге K . Схема процесса осадки пластически однородной полосы и кинематически допустимое поле скоростей показаны на рис.7.1.

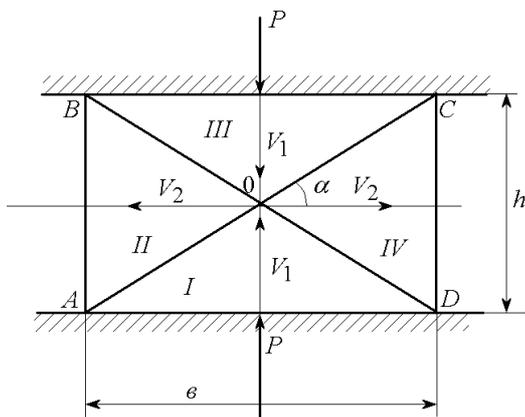


Рис.7.1.

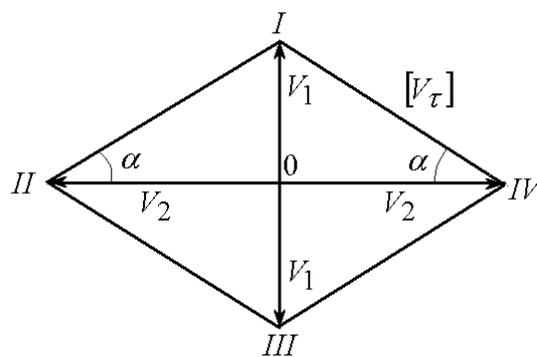


Рис.7.2.

Решение. Предполагаем, что длина a полосы значительно больше ширины b и толщины h , т.е. $a \gg b, a \gg h$, так что деформацию можно считать плоской. В поперечном сечении линии OA, OB, OC, OD являются линиями разрыва скоростей (следами плоскостей разрыва, перпендикулярными плоскости чертежа).

В силу условия несжимаемости на этих линиях непрерывны нормальные составляющие скоростей, а разрывы касательных составляющих, как это следует из годографа скоростей (рис.7.2), определяется следующим образом:

$$[v_r] = \frac{v_1}{\sin \alpha} = \frac{v_1}{h} \sqrt{b^2 + h^2}.$$

Длина любой линии разрыва

$$l = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 + h^2}.$$

Определим суммарную мощность разрыва

$$N_i = 4k[v_r]la = 2k v_1 a \frac{b^2 + h^2}{h}.$$

Мощность внешних сил

$$N_l = 2P v_1 = 2qabv_1,$$

где P и q - усилие и удельное усилие осадки полосы.

По теореме о верхних оценках

$$N_l \leq N_i.$$

Отсюда находим

$$q \leq k \left(\frac{b}{h} + \frac{h}{b} \right),$$

т.е. верхняя оценка q^* удельного усилия осадки составляет

$$q^* = k \left(\frac{b}{h} + \frac{h}{b} \right).$$

Верхние оценки усилия и мощности осадки.

$$P^* = q^* ab; \quad N^* = 2P^* V_1.$$

Задача 7.2. Найти удельное усилие осадки многослойного пакета (пластически неоднородной полосы) между двумя жесткими плитами, сближающимися со скоростями v_1 . Размеры j -го слоя b и h_j , а также предел текучести материала этого слоя k_j известны. Межслойным трением пренебречь. Схема процесса осадки многослойного пакета и кинематически допустимое поле скоростей показаны на рис.7.3.

Решение. Длина каждого слоя $a \gg b$ и $a \gg h$, так что деформированное состояние является плоским. Линии разрыва скоростей AC и BD ломанные, причем наклон отрезка ломанной в пределах j -го слоя к горизонтали равен α_j .

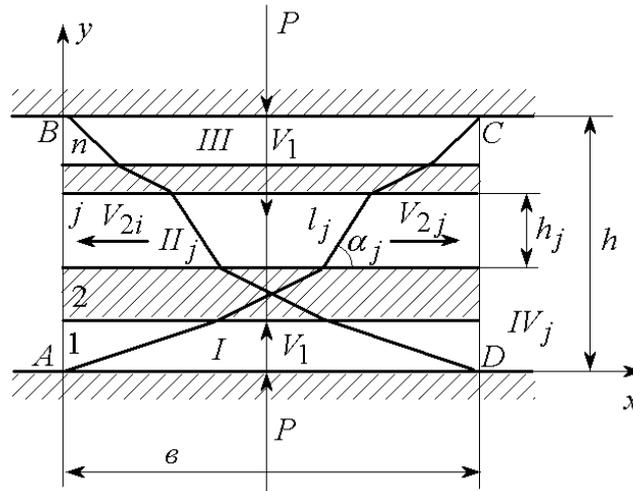


Рис.7.3.

Из годографа скоростей (рис.7.4) следует

$$[v_\tau] = \frac{v_1}{\sin \alpha_j}.$$

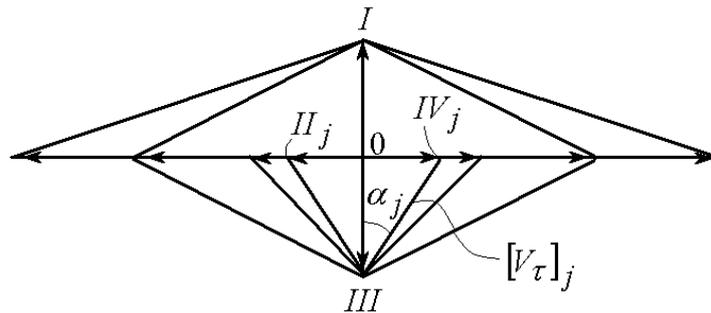


Рис.7.4.

Суммарная мощность разрыва

$$N_i = 2a \sum_{j=1}^n k_j [v_\tau]_j l_j = 2a v_1 \sum_{j=1}^n \frac{k_j l_j}{\sin \alpha_j}.$$

Мощность внешних сил

$$N_l = 2P v_1 = 2qabv_1.$$

На основании теоремы о внешних оценках

$$q^* = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^n \frac{k_j l_j}{\sin \alpha_j}.$$

Задача 7.3. Найти усилие вдавливания жесткого плоского штампа в пластическое полупространство. Деформацию считать плоской. Предел текучести материала при сдвиге равен k . Схема процесса выдавливания и кинематически допустимое поле скоростей показаны на рис.7.5.

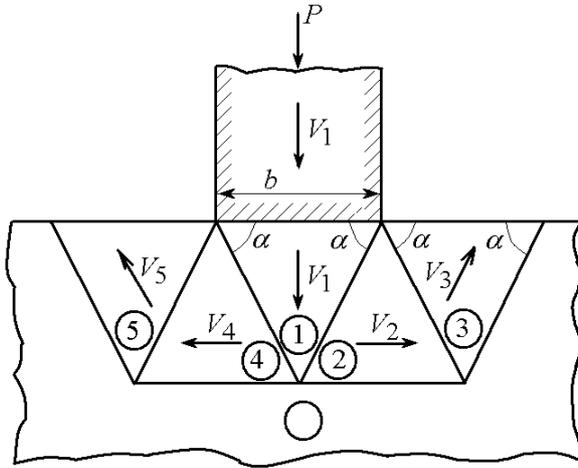


Рис.7.5.

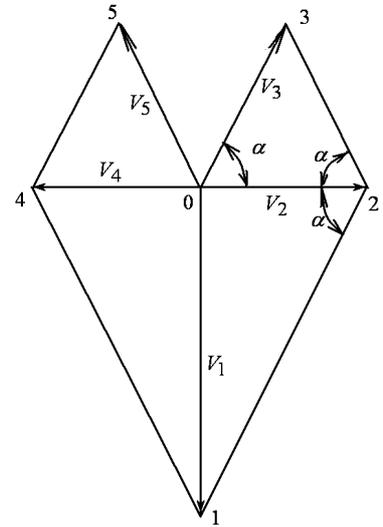


Рис.7.6.

Решение. Поле скоростей характеризуется единственным параметром – углом α , подлежащим определению из условия минимума мощности деформации.

Из годографа скоростей (рис.7.6) следует

$$v_2 = [v_\tau]_{02} = v_4 = [v_\tau]_{04} = v_1 \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$[v_\tau]_{12} = [v_\tau]_{14} = v_1 \operatorname{cosec} \alpha;$$

$$v_3 = [v_\tau]_{03} = v_5 = [v_\tau]_{05} = [v_\tau]_{23} = [v_\tau]_{45} = \frac{v_1}{2} \operatorname{cosec} \alpha.$$

Определяем длины линий разрыва:

$$l_{12} = l_{14} = l_{23} = l_{45} = l_{03} = l_{05} = \frac{b}{2} \operatorname{sec} \alpha;$$

$$l_{02} = l_{04} = b.$$

Находим мощность разрыва

$$\begin{aligned} N_i &= ka(l_{12}[v_\tau]_{12} + l_{14}[v_\tau]_{14} + l_{23}[v_\tau]_{23} + l_{45}[v_\tau]_{45} + \\ &+ l_{02}[v_\tau]_{02} + l_{04}[v_\tau]_{04} + l_{03}[v_\tau]_{03} + l_{05}[v_\tau]_{05}) = \\ &= 2kabv_1(3 + \cos 2\alpha)\operatorname{cosec} 2\alpha, \end{aligned}$$

где a - размер штампа в направлении, перпендикулярном к плоскости рисунка.

Мощность внешних сил

$$N_l = P v_1 = q a b v_1 .$$

По теореме о внешних оценках получаем

$$q^* = 2k(3 + \cos 2\alpha) \operatorname{cosec} 2\alpha .$$

Угол α , при котором q^* имеет минимум, найдем из уравнения

$$\frac{dq^*}{d\alpha} = 0 ,$$

получающего после преобразований вид

$$1 + 3 \cos 2\alpha = 0 .$$

Отсюда следует

$$\cos 2\alpha = -\frac{1}{3}; \quad 2\alpha = 109^\circ 30'; \quad \alpha = 54^\circ 45';$$

$$\operatorname{cosec} 2\alpha = \frac{3}{2\sqrt{2}} .$$

Легко проверить, что при найденном значении

$$\frac{d^2 q^*}{d\alpha^2} > 0 ,$$

что соответствует минимуму q^* .

Верхняя оценка удельного усилия при этом будет

$$q^* = 4\sqrt{2}k = 5,64k , \quad (7.5)$$

что лишь на 9,8% превышает точное значение

$$q = (2 + \pi)k = 5,14k ,$$

найденное впервые Л.Прандтлем.

Верхние оценки усилия и мощности вдавливания штампа в пластическое полупространство находятся по формулам:

$$p^* = q^* a b; \quad N^* = q^* a b v_1 .$$

Задача 7.4. Найти усилие закрытой прошивки полосы пуансоном, перемещающимся относительно контейнера со скоростью v_1 . Предел текучести материала полосы при сдвиге равен k . Геометрические размеры инструмента известны. Трением пренебречь. Схема процесса закрытой прошивки полосы показана на рис. 7.7.

Решение. Кинематически допустимое поле скоростей в этом случае зависит от параметра h (рис.7.7), физический смысл которого состоит в том, что h определяет глубину проникновения пластической деформации.

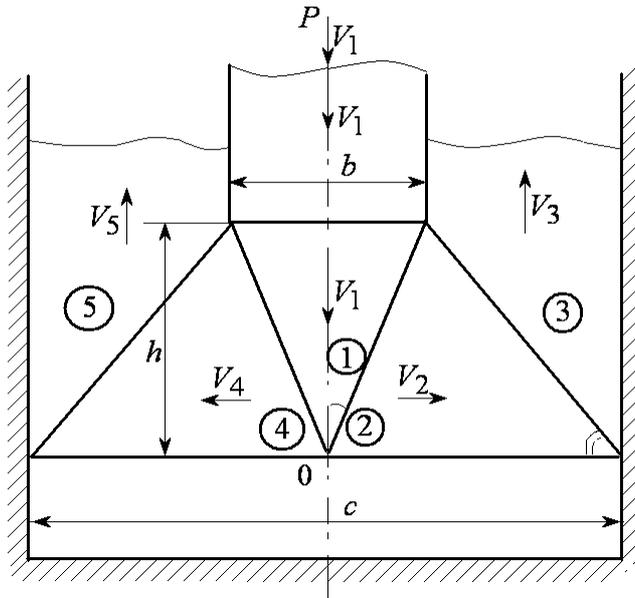


Рис.7.7.

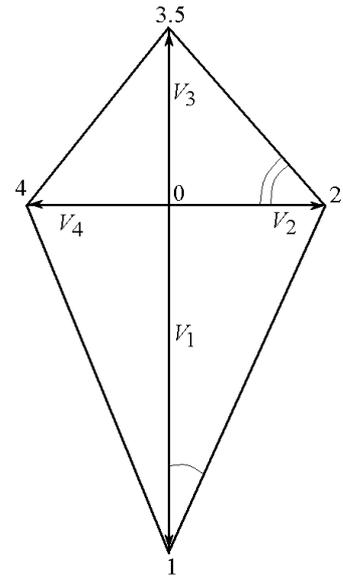


Рис.7.8.

Из годографа скоростей (рис.7.8) следует:

$$v_2 = [v_\tau]_{02} = v_4 = [v_\tau]_{04} = \frac{b}{2h} v_1;$$

$$v_3 = v_5 = \frac{b}{c-b} v_1;$$

$$v_{12} = [v_\tau]_{14} = \frac{\sqrt{b^2 + 4h^2}}{2h} v_1;$$

$$[v_\tau]_{23} = [v_\tau]_{45} = \frac{b\sqrt{(c-b)^2 + 4h^2}}{2h(c-b)} v_1.$$

Определяем длины линий разрыва:

$$l_{12} = l_{14} = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 + 4h^2};$$

$$l_{23} = l_{45} = \frac{1}{2} \sqrt{(c-b)^2 + 4h^2};$$

$$l_{02} = l_{04} = \frac{c}{2}.$$

Находим мощность разрыва:

$$N_i = ka(l_{12}[v_\tau]_{12} + l_{14}[v_\tau]_{14} + l_{23}[v_\tau]_{23} + l_{45}[v_\tau]_{45} + l_{02}[v_\tau]_{02} + l_{04}[v_\tau]_{04}) = kacv_1 \left(\frac{b}{h} + \frac{2h}{c-b} \right),$$

где a - размер в направлении, перпендикулярном к плоскости рисунка. Мощность внешних сил

$$N_l = P v_1 = qabv_1.$$

По теореме о верхних оценках получаем

$$q^* = \frac{kc}{b} \left(\frac{b}{h} + \frac{2h}{c-b} \right).$$

Наилучшая (т.е. наименьшая) верхняя оценка соответствует значению параметра h , определяемого из уравнения

$$\frac{dq^*}{dh} = \frac{kc}{b} \left(-\frac{b}{h^2} + \frac{2}{c-b} \right) = 0.$$

Отсюда находим

$$h = \sqrt{\frac{b(c-b)}{2}}.$$

Подставляя это значение h в формулу для q^* , окончательно получаем

$$q^* = \frac{2\sqrt{2}x}{\sqrt{x-1}} k; \quad x = \frac{c}{b}.$$

Верхние оценки усилия и мощности находятся также как в предыдущей задаче

Задача 7.5. Найти усилие выдавливания полосы через гладкую клиновую матрицу. Геометрические параметры инструмента заданы. Предел текучести выдавливаемого материала при сдвиге равен k .

Решение. Рассмотрим схему процесса выдавливания полосы через гладкую клиновую матрицу и кинематически допустимое поле скоростей (рис.7.9), которому соответствует годограф скоростей, изображенный на рис. 7.10. Поле скоростей зависит от одного параметра, в качестве которого примем угол β . Угол γ введён для большей наглядности.

Из условия несжимаемости (равенства расходов)

$$v_1 ab_1 = v_4 ab_2$$

находим скорость на выходе

$$v_4 = v_1 \frac{b_1}{b_2} = v_1 n,$$

где n - степень редукции, $n = b_1/b_2$.

Применяя к треугольникам на годографе скоростей теорему синусов, получаем

$$v_2 = v_3 = v_1 n \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)};$$

$$[v_\tau]_{12} = [v_\tau]_{13} = v_1 n \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin \gamma \sin(\alpha + \beta)};$$

$$[v_\tau]_{24} = [v_\tau]_{34} = v_1 n \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

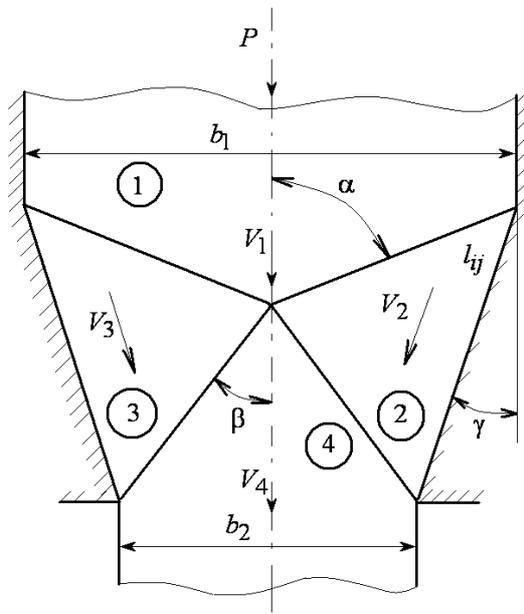


Рис.7.9.

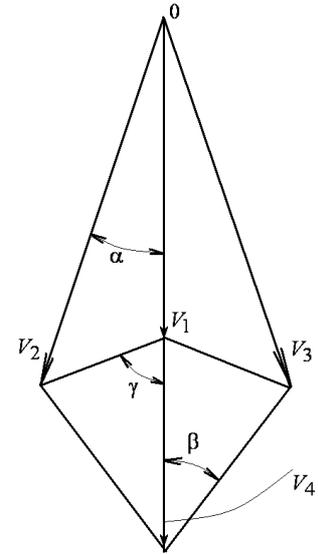


Рис.7.10.

Определяем длины линий разрыва

$$l_{12} = l_{13} = \frac{b_1}{2 \sin \gamma}; \quad l_{24} = l_{34} = \frac{b_1}{2n \sin \beta}.$$

Находим мощность разрыва

$$\begin{aligned} N_i &= ka(l_{12}[v_\tau]_{12} + l_{13}[v_\tau]_{13} + l_{24}[v_\tau]_{24} + l_{34}[v_\tau]_{34}) = \\ &= kab_1 v_1 \frac{\sin \alpha (n \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma)}{\sin \beta \sin^2 \gamma \sin(\alpha + \beta)}. \end{aligned}$$

Из геометрических соображений имеем

$$(n-1) \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta + n \operatorname{ctg} \gamma.$$

Обозначим

$$A = \operatorname{ctg} \alpha, \quad B = \operatorname{ctg} \beta.$$

Тогда

$$\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{1+B^2}}; \quad \sin(\alpha + \beta) = \frac{A+B}{\sqrt{(1+A^2)(1+B^2)}};$$

$$\sin \gamma = \frac{n}{\sqrt{n^2 + [(n-1)A - B]^2}}.$$

С учетом введенных обозначений выражение мощности разрыва примет вид

$$N_i = \frac{kab_1 v_1}{n} \frac{n^2 + [(n-1)A - B]^2 + n(1+B^2)}{A+B}.$$

Мощность внешних сил

$$N_l = P v_1 = q a b_1 v_1.$$

По теореме о верхних оценках

$$q^* = \frac{k n^2 + [(n-1)A - B]^2 + (1 + B^2)n}{n(A + B)}.$$

Минимум q^* имеет место при условии

$$\frac{dq^*}{dB} = 0,$$

так как параметры β и B взаимно связаны.

Из этого условия получаем

$$B = \sqrt{n(1 + A^2)} - A$$

или

$$\beta = \text{arccctg}(\sqrt{n} \text{ cosec} \alpha - \text{ctg} \alpha).$$

Вводя значение B , обеспечивающее минимум q , в выражение для q находим наилучшую верхнюю оценку удельного усилия выдавливания:

$$q^* = 2k \left(\frac{n+1}{\sqrt{n}} \text{cos ec} \alpha - 2 \text{ctg} \alpha \right).$$

Верхние оценки усилия и мощности находятся по формулам, приведенным в задаче 7.3.

Задача 7.6. Найти усилие выдавливания полосы через предельно шероховатую клиновую матрицу. Геометрические размеры инструмента и полосы известны. Предел текучести материала и полосы при сдвиге равен k .

Решение. Отличие рассматриваемой задачи от предыдущей заключается в том, что теперь необходимо учесть мощность сил трения на границе материала с инструментом в пределах наклоненных участков матрицы.

Длина наклонного участка (см. рис. 7.9) составляет

$$l_n = \frac{b_1 - b_2}{2 \sin \alpha} = \frac{b_1 (n-1)}{2 n \sin \alpha}.$$

Так как матрица предельно шероховата, то удельная сила трения равна k , и мощность сил трения будет

$$N_{mp} = k l_n a (v_2 + v_3) = \frac{k a b_1 v_1 (n-1) \sin \beta}{\sin \alpha \sin(\alpha + \beta)}.$$

По теореме о верхних оценках получаем

$$N_l \leq N_i + N_{mp}.$$

Отсюда для верхней оценки удельного усилия q^* , используя выражения N_i и N_l из решения задачи 7.5, находим

$$q^* = k \frac{\sin^2 \alpha (n \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma) + (n-1) \sin^2 \beta \sin^2 \gamma}{\sin \alpha \sin \beta \sin^2 \gamma \sin(\alpha + \beta)}.$$

Для дальнейшего анализа удобно представить q^* в виде

$$q^* = \frac{k}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta} \left(\frac{n-1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \beta} + \frac{n}{\sin^2 \gamma} \right) = k \frac{f_1}{f_2},$$

где

$$f_1 = \frac{n-1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \beta} + \frac{n}{\sin^2 \gamma}; f_2 = \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta.$$

Условие минимума q^* по β заключается в равенстве нулю первой производной $dq^*/d\beta$. Отсюда

$$\frac{df_1}{d\beta} = \frac{2(\operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{ctg} \beta)}{\sin^2 \beta}, \quad \frac{df_2}{d\beta} = -\frac{1}{\sin^2 \beta}.$$

После преобразований получаем

$$\beta = \operatorname{arcctg} \left(\frac{n\sqrt{2}}{\sqrt{n+1}} \operatorname{cosec} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha \right).$$

Так как

$$\frac{n\sqrt{2}}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n}$$

значение β , рассчитанное по предыдущей формуле, больше соответствующего значения, найденного по формуле приведенной в задаче 7.5.

Вводя значение β , в выражение для q^* , окончательно находим

$$q^* = 2k \left[\sqrt{2(n+1)} \operatorname{cosec} \alpha - 2 \operatorname{ctg} \alpha \right].$$

Поскольку

$$\sqrt{2(n+1)} > \frac{n+1}{\sqrt{n}}$$

значение q^* , вычисляемое по полученной формуле, больше соответствующего значения q^* , определяемого по формуле данной в задаче 7.5.

Задача 7.7. Найти усилие выдавливания полосы через гладкую плоскую матрицу со степенью редукции, равной n . Предел текучести материала полосы при сдвиге равен k .

Решение. Рассмотрим схему процесса выдавливания полосы через гладкую плоскую матрицу при $n=3$ (рис. 7.11). Слева от оси симметрии изображено поле

линий скольжения, справа - кинематически допустимое поле скоростей, полученное из поля линий скольжения заменой дуги окружности отрезка прямой.

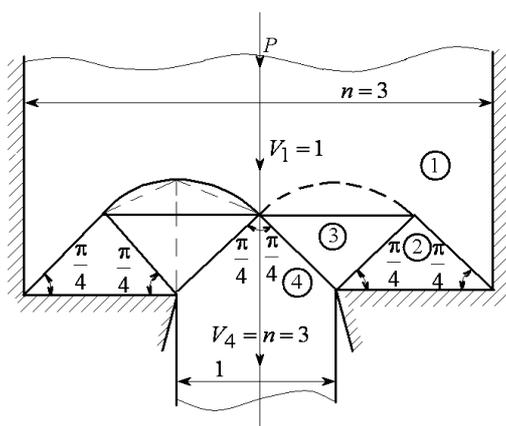


Рис. 7.11.

Из годографа скоростей (рис. 7.12) определяем разрывы скоростей:

$$[v_\tau]_{12} = [v_\tau]_{23} = \sqrt{2}, [v_\tau]_{13} = 2, [v_\tau]_{34} = 2\sqrt{2}.$$

Находим длины линий разрыва:

$$l_{12} = l_{23} = l_{34} = \frac{\sqrt{2}}{2}, l_{13} = 1.$$

Определяем мощность разрыва:

$$N_i = 2ka(l_{12}[v_\tau]_{12} + l_{13}[v_\tau]_{13} + l_{23}[v_\tau]_{23} + l_{34}[v_\tau]_{34}) = 12ka.$$

Мощность внешних сил

$$N_l = P \cdot 1 = q \cdot 3a \cdot 1 = 3qa.$$

По теореме о верхних оценках

$$q^* = 4k.$$

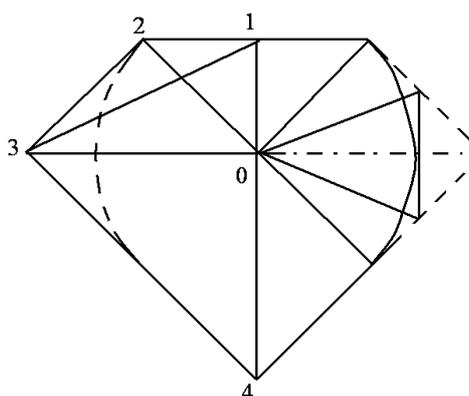


Рис. 7.12.

Известно точное решение

$$q = \frac{2(2 + \pi)}{3}k,$$

повышаемое верхней оценкой на 16,7%.

Для повышения точности расчетов дугу окружности можно заменить двумя хордами (штрихпунктирные линии), тремами и т.д. Однако объем вычислений при этом увеличивается.

Усилие и мощность находятся по формулам также как в задаче 7.5.

Задача 7.8. Найти усилие выдавливания полосы через предельно шероховатую плоскую матрицу. Известны геометрические размеры и предел текучести при сдвиге материала полосы k .

Решение. Рассмотрим схему процесса выдавливания полосы через предварительно шероховатую плоскую матрицу (рис. 7.13). В кинематически допустимом поле скоростей предусмотрена возможность образования мертвых зон, ограниченных прямыми с углами наклона α к вертикали.

Рассматриваемая задача похожа на задачу 6 о выдавливании полосы через предельно шероховатую клиновую матрицу (см. рис. 7.9). Однако в данном случае угол α неизвестен, так как неизвестны заранее размеры мертвых зон. Поэтому в этой задаче подлежат определению из условия минимума q^* как угол β так и угол α .

Используем выражение для q^* , полученное при решении задачи 6:

$$q^* = k \frac{f_1}{f_2}.$$

Сформулируем условия минимума q^* по α и β :

$$\frac{\partial q^*}{\partial \alpha} = 0; \quad \frac{\partial q^*}{\partial \beta} = 0.$$

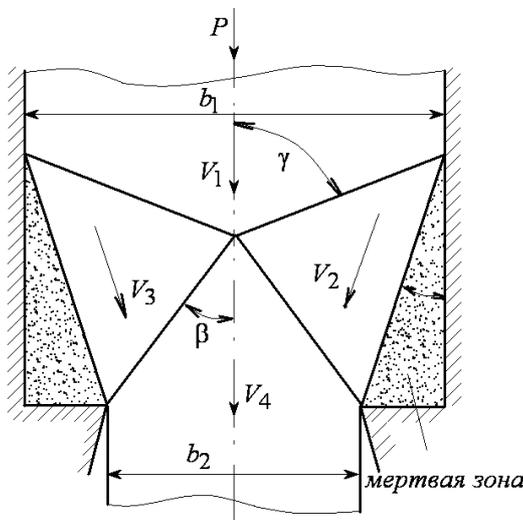


Рис.7.13.

Второму условию удовлетворяет формула для определения β .

Рассмотрим первое условие:

$$f_2 \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} - f_1 \frac{\partial f_2}{\partial \alpha} = 0.$$

Имеем

$$\frac{\partial f_1}{\partial \alpha} = -\frac{2(n-1)(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)}{\sin^2 \alpha};$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \alpha} = -\frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

После преобразований получаем

$$\beta = \operatorname{arcctg} \sqrt{\varphi(n) + \frac{2\sqrt{2}n \cos \alpha}{\sqrt{n+1} \sin^2 \alpha} - \frac{n(n+3)}{n+1} \operatorname{ctg}^2 \alpha},$$

где

$$\varphi(n) = \frac{2n(2n+1)(n-4)}{n+1}.$$

Приравнивания аргумент арккотангенсов в правых частях формул для определения β в задаче 6 и полученной, после преобразований находим

$$\alpha = \arccos \frac{2\sqrt{2}n + 2\sqrt{n(4n^5 - 29n^4 - 34n^3 + 65n^2 + 26n + 2)}}{4n^3 - 13n^2 - 10n - 1}.$$

Выражение для α имеет смысл, если

$$4n^5 - 29n^4 - 34n^3 + 65n^2 + 26n + 2 \geq 0;$$

$$4n^3 - 13n^2 - 10n - 1 > 0.$$

После вычисления угла α , далее находим угол β , а затем определяем величины q^* , P^* и N^* .

Рассмотрим числовой пример.

Пусть $n = 3$. Тогда $\alpha \approx \arccos 0,77 = 40^\circ$, $\beta \approx \operatorname{arctg} 5,45 = 10^\circ 30'$,
 $\gamma \approx \operatorname{arctg} 0,53 = 62^\circ$, $f_1 \approx 67$, $f_2 \approx 6,65$, $q^* \approx 10k$

$$P^* \approx 10kab_1; N^* \approx 10kab_1v_1.$$

Л.А. Шофманом предложена формула для q , полученная методом линий скольжения:

$$q = 2k(0,8 + 2,75 \lg n + C),$$

где C - величина, зависящая от параметров и площадей сечений заготовки и очка матрицы, от длины рабочего пояска матрицы и от степени редукиции. Примем $C=0,45$. Тогда $q=0,8k$, что на 25% меньше верхней оценки.

Задача 7.9. Найти силовые параметры процесса волочения полосы, если известны геометрические параметры и предел текучести материала полосы при сдвиге равен k .

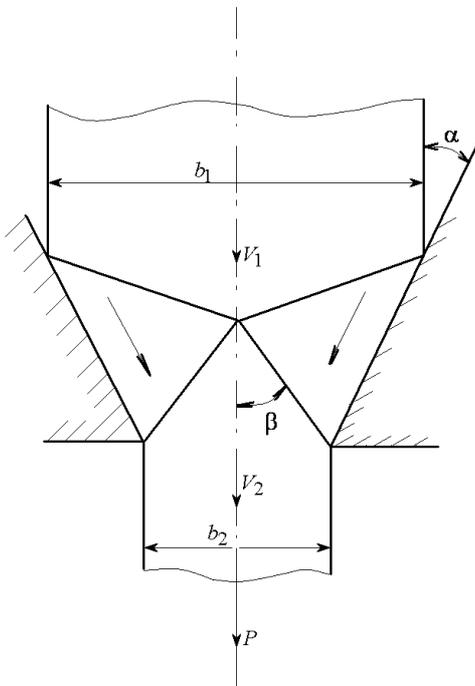


Рис.7.14.

Решение. Рассмотрим схему процесса волочения (рис.7.14). Кинематически допустимое поле скоростей принято таким же, как и при решении задач 7.5 и 7.6. Поэтому выражение для N_i будет аналогичным.

Мощность внешних сил при волочении

$$N_l = Pv_2 = qab_2v_2 = qab_1v_1.$$

Поэтому остаются справедливыми выражения для верхней оценки удельного усилия волочения.

Для верхних оценок усилия и мощности волочения имеем

$$P^* = q^* ab_2, N^* = P^* v_2. \quad (7.14)$$

Задача 7.10. Найти усилие осадки кольца в контейнере. Известны размеры кольца, предел текучести материала кольца при сдвиге k . Инструмент считать предельно шероховатым. Схема процесса осадки кольца в контейнере дана на рис.7.15.

Решение. Предполагаем, что кинематически допустимое поле скоростей состоит из трех областей 1, 2, 3, в которых радиальные и осевые компоненты скорости представлены в виде

$$\left. \begin{aligned} u_1 = 0; w_1 = -w_n; \\ u_2 = 0; w_2 = 0; \\ u_3 = u(r); w_3 = -w^* = const \end{aligned} \right\},$$

где w_n - скорость пуансона ; w^* и $u(r)$ - искомые скорости.

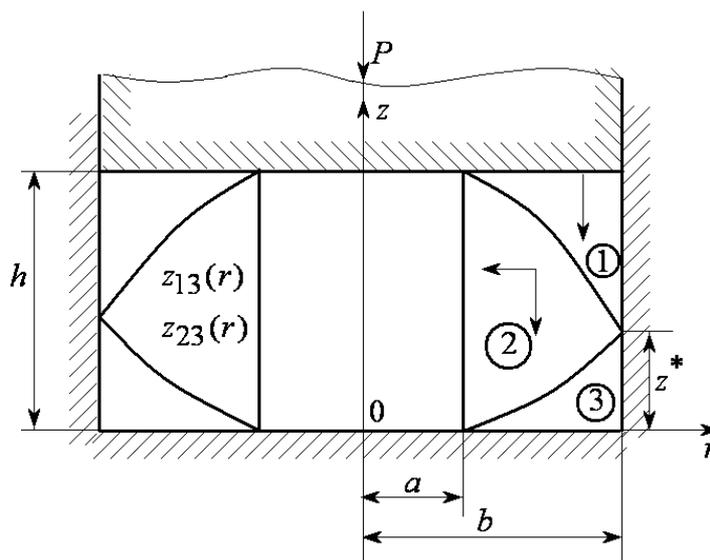


Рис. 7.15.

Указанные области разделены поверхностями разрыва скоростей, представленными в меридиональном сечении линиями разрыва $z_{13}(r)$ и $z_{23}(r)$, являющимися искомыми.

Как известно, кинематически допустимое поле скоростей должно удовлетворять трем условиям:

- 1) условию несжимаемости;
- 2) граничным условиям в скоростях;
- 3) условию непрерывности нормальной составляющей скорости при переходе через поверхность разрыва скоростей.

Нетрудно заметить, что граничные условия в скоростях удовлетворяются так как в области 1, соприкасающейся с пуансоном, осевая компонента скорости равна скорости пуансона, а область 2 вблизи контейнера не подвижна. Область 3 не имеет границ контакта с инструментом, и граничные условия в скоростях для нее не задаются.

Условие несжимаемости, имеющие в случае осесимметричной деформации вид

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u_i}{r} + \frac{\partial W_i}{d \partial z} = 0 \quad (i = 1; 2; 3)$$

тождественно выполняется в областях 1 и 2, а в области 3 представляется следующим образом:

$$\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} = 0.$$

Отсюда следует

$$\frac{du}{u} = -\frac{dr}{r}; \ln u = -\ln r + \ln c; u = -\frac{c}{r},$$

где c - произвольная постоянная интегрирования.

Сформулируем условия непрерывности нормальной составляющей скорости при переходе через линии разрыва $z_{13}(r)$ (рис.7.16) и $z_{23}(r)$ (рис. 7.17) в меридианальном сечении:

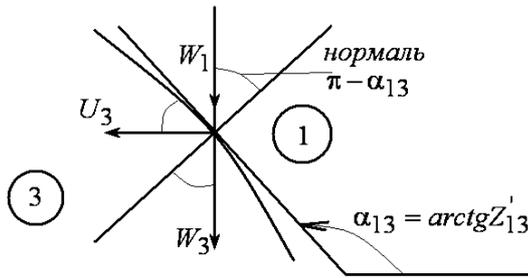


Рис. 7.16.

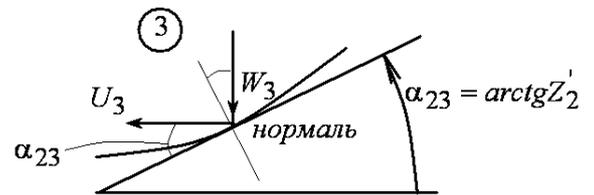


Рис.7.17.

$$\left. \begin{aligned} u_3 \sin(\pi - \alpha_{13}) + w_3 \cos(\pi - \alpha_{13}) &= w_1 \cos(\pi - \alpha_{13}); \\ u_3 \sin \alpha_{23} - w_3 \cos \alpha_{23} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

$$z'_{13} = \operatorname{tg} \alpha_{13} = \frac{w_3 - w_1}{u_3} = -\frac{w_n - w^*}{c} r$$

$$z'_{23} = \operatorname{tg} \alpha_{23} = \frac{w_3}{u_3} = \frac{w^*}{c} r$$

Интегрирование этих выражений дает

$$z_{13}(r) = -\frac{w_n - w^*}{2c} r^2 + c_1;$$

$$z_{23}(r) = \frac{w^*}{2c} r^2 + c_2,$$

где c_1, c_2 - произвольные постоянные интегрирования.

Сформулируем граничные условия:

$$r = a, z_{13} = h;$$

$$r = a, z_{23} = 0;$$

$$r = b, z_{13} = z_{23}.$$

Используя их, получаем систему трех уравнений относительно четырех неизвестных c, c_1, c_2, w^*

$$\left. \begin{aligned} -\frac{w_n - w^*}{2c} a^2 + c_1 &= h; \\ \frac{w^*}{2c} a^2 + c_2 &= 0; \\ -\frac{w_n - w^*}{2c} b^2 + c_1 &= \frac{w}{2c} b^2 + c_2. \end{aligned} \right\}$$

Вычитаем из первого уравнения системы второе, получаем

$$c_1 - c_2 = h + \frac{w_n a^2}{2c}.$$

Из третьего уравнения имеем

$$c_1 - c_2 = \frac{w_n b^2}{2c}.$$

В результате находим

$$c = \frac{w_n (b^2 - a^2)}{2h}.$$

Константы c_1 и c_2 выражаем через известные величины b, a, h и неизвестную величину w^* :

$$c_1 = h + \frac{w_n - w^*}{2c} a^2 = \frac{h(w_n b^2 - w^* a^2)}{w_n (b^2 - a^2)};$$

$$c_2 = -\frac{w^*}{2c} a^2 = -\frac{h w^* a^2}{w_n (b^2 - a^2)}.$$

Уравнение относительно w^* получаем из условия минимума мощности пластической деформации N_i , которая складывается из мощности непрерывной деформации N_3 в области 3, мощностей разрыва N_{13} и N_{23} на поверхности скорости и мощности трения N_{mp} на поверхности контакта в области 1 с контейнером.

Отличие от нуля компоненты тензора скоростей деформаций в области 3 составляет

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{c}{r^2}; \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r} = -\frac{c}{r^2}.$$

Интенсивность скоростей деформаций сдвига в этой области

$$H = \frac{2c}{r^2}.$$

Находим мощность непрерывной деформации:

$$\begin{aligned} N_3 &= \int_0^b \int_a^r \int_{z_{23}}^{z_{13}} T H r dZ dr d\varphi = 4\pi T c \int_a^b \frac{z_{13}(r) - z_{23}(r)}{r} dr = \\ &= 2\pi T w_n \int_a^b \left(\frac{b^2}{r} - r \right) dr = \pi T w_n \left[2b^2 \ln \frac{b}{a} - (b^2 - a^2) \right]. \end{aligned}$$

Определяем мощности разрыва. Элемент поверхности разрыва описывается выражением

$$dS_{ij} = 2\pi r \sqrt{1 + z'_{ij}{}^2} dr.$$

Находим скорости разрыва (см. рис. 7.16 и 7.17):

$$\begin{aligned} [v_\tau]_{13} &= u_3 \cos(\pi - \alpha_{13}) - w_3 \sin(\pi - \alpha_{13}) + w_1 \sin(\pi - \alpha_{13}) = \\ &= -\cos \alpha_{13} [u_3 + (w_3 - w_1)z_{13}]; \\ [v_\tau]_{23} &= u_3 \cos \alpha_{23} - w_3 \sin \alpha_{23} = \cos \alpha_{23} (u_3 - w_3 z'_{23}). \end{aligned}$$

Используя соотношение

$$\cos \alpha_{ij} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 \alpha_{ij}}} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + Z'_{ij}{}^2}},$$

окончательно находим

$$\begin{aligned} N_{13} &= \int_{(S_{13})} T [v_\tau]_{13} | ds_{13} = 2\pi T \left| \int_a^b \left[\frac{c}{r} + \frac{(w_n - w^*)^2 r}{c} \right] r dr \right| = \\ &= \frac{2\pi T (b-a)}{3c} \left[3c^2 + (w_n - w^*)^2 (a^2 + ab + b^2) \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{23} &= \int_{(S_{23})} T [v_r]_{213} | ds_{23} = 2\pi T \left| \int_a^b \left[\frac{c}{r} - \frac{(w^*)^2 r}{c} \right] r dr \right| = \\ &= \frac{2\pi T (b-a)}{3c} \left[w^{*2} (a^2 + ab + b^2) - 3c^2 \right]; \end{aligned}$$

$$N_p = N_{13} + N_{23} = \frac{2\pi T (b^3 - a^3)}{3c} \left[w_n^2 - 2w^* (w_n - w^*) \right]$$

Определяем мощность трения:

$$N_{mp} = 2\pi b(h-z)^* T w_n,$$

где для Z^* (см. рис. 7.15) имеем

$$z = z_{23}(b) = \frac{w^* b^2}{2c} - \frac{w^* a^2}{2c} = \frac{w^* h}{w_n}.$$

Таким образом

$$N_{mp} = 2\pi T(w_n - w^*)bh.$$

Суммируя N_3 , N_p , N_{mp} , получаем выражение мощности пластической деформации:

$$N_i = N_3 + N_p + N_{mp}.$$

Сформулируем условие минимума мощности N_i

$$\frac{\partial N_i}{\partial w^*} = \frac{\partial N_p}{\partial w^*} + \frac{\partial N_{mp}}{\partial w^*} = 0.$$

Дифференцируя находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_p}{\partial w^*} &= \frac{4\pi T}{3c} (b^3 - a^3) (2w^* - w_n), \\ \frac{\partial N}{\partial w^*} &= -2\pi T b h. \end{aligned}$$

Подставляя эти значения в условие минимума N_i , получаем

$$2(b^3 - a^3)(2w^* - w_n) - 3cbh = 0.$$

Отсюда следует

$$w^* = \frac{3cbh}{4(b^3 - a^3)} + \frac{w_n}{2} = \frac{w_n}{2} \left[1 + \frac{3b(a+b)}{4(a^2 + ab + b^2)} \right].$$

Вводя значение, вычисленное по формуле, в выражение для определения мощности пластической деформации, можно получить наилучшую её верхнюю оценку.

Мощность внешних сил

$$N_l = P w_n \leq N_i.$$

Отсюда находим верхние оценки усилия осадки кольца в контейнере и удельного усилия

$$P^* = \frac{N_i}{w_n}; q^* = \frac{P^*}{\pi(b^2 - a^2)}.$$

Тема 8. Метод конечных элементов

План

- 8.1. Сущность метода
- 8.2. Дискретизация области и конечные элементы
- 8.3. Локальная аппроксимация искомой функции на конечном элементе
- 8.4. Скорости деформаций
- 8.5. Особенности использования МКЭ для жестко-пластического тела
- 8.6. Основные соотношения и уравнения
- 8.7. Минимизация функционала. Составление системы линейных алгебраических уравнений. Их решение
- 8.8. Определение напряжений в очаге деформации
- 8.9. Задача о раздаче тонкостенной цилиндрической трубы внутренним давлением
- 8.10. Примеры решения задач

8.1. Сущность метода

Метод конечных элементов (МКЭ) завоевал широкое признание как эффективный метод решения краевых задач математической физики.

Популярность метода объясняется простотой его физической интерпретации и математической формы, гибкостью численного алгоритма, приспособленного для реализации на ЭВМ. В основе МКЭ лежит идея замены непрерывной функции ее дискретной моделью. Вся исследуемая область функции разбивается на конечное число элементов, соединенных в узловых точках; рассматриваемая функция локально аппроксимируется на каждом конечном элементе непрерывными функциями, определяющими их значения в узлах. Метод МКЭ позволяет найти скорости, перемещения, деформации, скорости деформаций, напряжения в каждой узловой точке исследуемой области.

К основным этапам решения задачи с применением МКЭ относятся:

- 1) дискретизация области (разбиение на конечное число элементов);
- 2) локальная аппроксимация функции на отдельном элементе;
- 3) глобальная аппроксимация функции кусочно-полиномиальной функцией, определенной на всей области;
- 4) составление системы линейных алгебраических уравнений с применением метода Рунге или метода Галеркина;
- 5) решение этой системы относительно узловых значений;
- 6) вычисление искомых величин в элементе.

Если в рассматриваемом методе в качестве неизвестных рассматриваются перемещения и скорости в узлах области, то этот метод называется методом перемещений, если же – напряжения, то называется метод сил.

Первый метод связан с методом верхней оценки, так как рассматриваются кинематически возможные поля скоростей, а второй – с методом нижней оценки,

поскольку используются статически возможные поля напряжений. Наибольшее распространение получил первый метод.

8.2. Дискретизация области и конечные элементы

Процесс дискретизации области включает: а) разбиение тела на конечные элементы – непересекающиеся подобласти; б) нумерацию элементов и узлов (рис. 8.1).

Разбиение области на элементы сводится к заданию числа, размеров и формы элементов. При этом используются одномерные, двумерные и трехмерные элементы: отрезки прямых, треугольники, прямоугольники, прямоугольные параллелепипеды, тетраэдры, призмы и такие же элементы с криволинейными сторонами. Наибольшее практическое применение получили симплекс-элементы. К ним относятся линейный одномерный элемент с двумя узлами, линейный треугольник с тремя узлами и линейный тетраэдр с четырьмя узлами. Размеры отдельных элементов могут варьироваться в зависимости от градиентов изменения искомых величин. При дискретизации области с применением симплекс-элементов необходимо стремиться, чтобы треугольники были равносторонними, а тетраэдры – правильными тетраэдрами.

8.3. Локальная аппроксимация искомой функции на конечном элементе

В качестве примера рассмотрим треугольный элемент в условиях плоской деформации с узлами i, j, m (рис. 8.2). узлы нумеруются, начиная с i -го узла, против часовой стрелки. Толщина элемента S , площадь A . Обозначим компоненты скоростей узлов на этапе (u_i, v_i) , (u_j, v_j) , (u_m, v_m) . В качестве неизвестных примем функции составляющие скорости перемещения U и V в элементе.

Простейшими функциями скоростей перемещений будут линейные полиномы

$$\begin{aligned} U &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y; \\ V &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ определяются путем подстановки в эти уравнения скоростей и координат узловых точек, т.е.

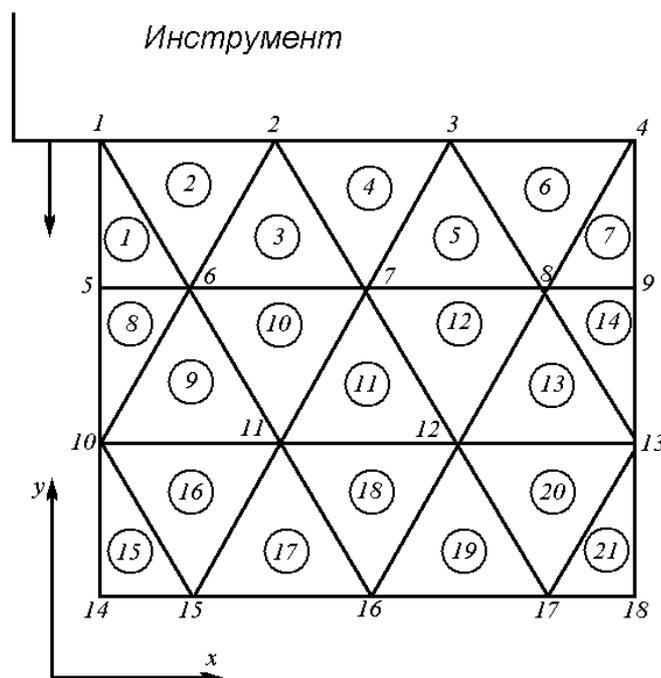


Рис. 8.1. Схема разбивки пластической области линейными треугольниками с тремя узлами

$$\begin{aligned}
u_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i; \\
u_j &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j; \\
u_m &= \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m,
\end{aligned}
\tag{8.2}$$

и решения этих уравнений относительно α_i , получим

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= (a_i u_i + a_j u_j + a_m u_m) / 2A; \\
\alpha_2 &= (b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m) / 2A; \\
\alpha_3 &= (c_i u_i + c_j u_j + c_m u_m) / 2A
\end{aligned}
\tag{8.3}$$

где A - площадь треугольника,

$$A = (x_j y_m + x_m y_i + x_i y_j - x_j y_i - x_i y_m - x_m y_j) / 2,
\tag{8.4}$$

где a_i, b_i и c_i определены следующими выражениями:

$$a_i = x_j y_m - x_m y_j; \quad b_i = y_j - y_m; \quad c_i = x_m - x_j.
\tag{8.5}$$

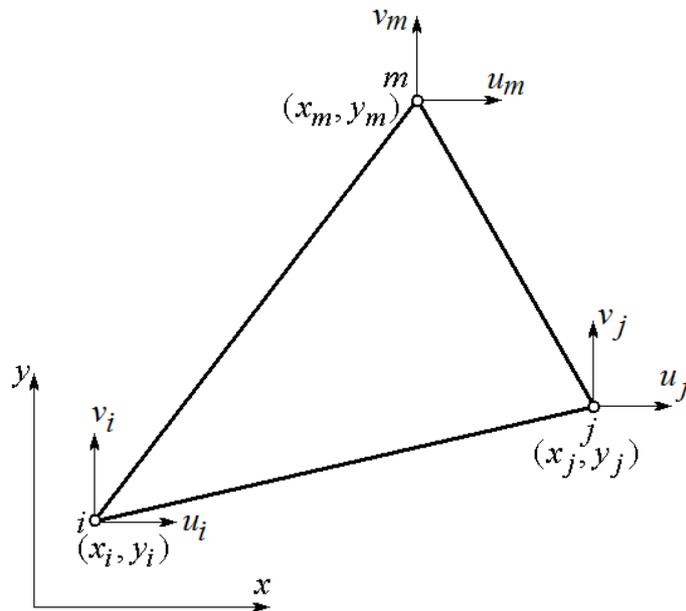


Рис. 8.2. Треугольный элемент в условиях плоской деформации

Другие коэффициенты получаются путем циклической перестановки индексов. Используя эти значения, уравнения (8.1) можно переписать через скорости в глобальных узлах

$$\begin{aligned}
U &= \{(a_i + b_i x + c_i y)u_i + (a_j + b_j x + c_j y)u_j + (a_m + b_m x + c_m y)u_m\} / 2A; \\
V &= \{(a_i + b_i x + c_i y)v_i + (a_j + b_j x + c_j y)v_j + (a_m + b_m x + c_m y)v_m\} / 2A.
\end{aligned}
\tag{8.6}$$

Заметим, что требование непрерывности скорости через границу, проходящую между двумя смежными элементами, удовлетворяется автоматически, поскольку скорости изменяются непрерывно вдоль границы между двумя узловыми точками в обе стороны.

Соотношения (8.6) могут быть записаны в форме

$$U = N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m;
\tag{8.6'}$$

$$V = N_i v_i + N_j v_j + N_m v_m;$$

N_i, N_j, N_m называется функциями формы. Можно показать, что функции формы удовлетворяют требованиям $N_i=1$ в узле i и нулю в узлах j и m ; $N_j=1$ в узле j и нулю в узлах i и m ; $N_m=1$ в узле m и нулю в узлах i и j .

Эти же соотношения (8.6) и (8.6') представляются в матричном виде

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i O & N_j O & N_m O \\ O N_i & O N_j & O N_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} \quad (8.6'')$$

Сокращенная запись будет

$$\{v\} = [N]\{v\}, \quad (8.6''')$$

где

$$\{v\}^T = [u_i v_i u_j v_j u_m v_m].$$

Здесь использована следующая матричная символика: $\{ \}$ - вектор столбец; $[\]$ - матрица или вектор строка, верхний индекс T после матричных скобок означает операцию транспонирования.

В практике решения плоских задач могут использоваться полиномиальные функции второго, третьего и более высоких порядков. Для этого необходимо иметь элемент с большим (чем три) числом узлов. Такой элемент называется *комплекс-элементом*. Может найти применение *мультиплекс-элемент*. Границы такого элемента (прямоугольника) должны быть параллельны координатным осям. Если этот прямоугольник с четырьмя узлами, то полином может быть взят в виде

$$U = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy.$$

Увеличение числа узлов и повышение порядка элементов (порядок элемента – величина на единицу меньшая числа узлов на стороне треугольника) позволяет существенно уменьшить число элементов для получения достаточно точного решения, однако для рассмотрения тела сложной формы при дискретизации области необходимо использовать криволинейные элементы.

8.4. Скорости деформаций

В задачах плоской деформации компоненты скорости малых деформаций определяются, как

$$\dot{e}_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \dot{e}_y = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad \dot{\gamma}_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}. \quad (8.7)$$

При подстановке уравнений (8.6) в соотношения (8.7) получим компоненты скорости деформации треугольного элемента через скорости узлов

$$\begin{aligned}\dot{e}_x &= (b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m) / 2A; \\ \dot{e}_y &= (c_i v_i + c_j v_j + c_m v_m) / 2A; \\ \dot{\gamma}_{xy} &= (c_i u_i + c_j u_j + c_m u_m + b_i v_i + b_j v_j + b_m v_m) / 2A.\end{aligned}\quad (8.8)$$

Поскольку компоненты скорости деформации не содержат слагаемых с координатами x и y скорости деформации постоянны по всему элементу.

Уравнения (8.8) можно переписать в матричном виде:

$$\{\dot{e}\} = [B] \{v\} \quad (8.8')$$

где

$$\{\dot{e}\} = \begin{Bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{\gamma}_{xy} \end{Bmatrix}; [B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i O & b_j O & b_m O \\ O c_i & O c_j & O c_m \\ c_i b_i & c_j b_j & c_m b_m \end{bmatrix}; \{v\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix}. \quad (8.8'')$$

Скорость деформации изменения объема \dot{e}_v при плоской деформации определяется как

$$\dot{e}_v = \dot{e}_x + \dot{e}_y = (b_i u_i + c_i v_i + b_j u_j + c_j v_j + b_m u_m + c_m v_m) / 2A. \quad (8.9)$$

Скорость изменения объема элемента (объем $V = AS$)

$$\dot{V} = \dot{e}_v V = \dot{e}_v (AS) \quad (8.10)$$

8.5. Особенности использования МКЭ для жестко-пластического тела

При анализе процессов ОМД для упрощения решений часто используется модель жесткопластического тела, поскольку упругие деформации намного меньше пластических. При таком предположении напряжения в жесткой зоне определить нельзя. Кроме того, для несжимаемого материала среднее напряжение не связано с компонентами скорости деформации и можно только определить компоненты девиатора напряжений по соотношениям Сен-Венана – Леви-Мизеса. Для того чтобы преодолеть эти трудности предлагаются различные усовершенствования. Пользуясь полученным полем скоростей, можно вычислить напряжения интегрированием уравнения равновесия с учетом граничных напряжений, как это делается в методе визиопластичности. Гидростатическое давление (среднее напряжение) можно найти используя метод множителей Лагранжа. Кроме того, напряжения можно определить непосредственно из оптимального поля скоростей, используя слегка сжимаемый материал.

8.6. Основные соотношения и уравнения

Рассмотрим тело из жесткопластического материала, удовлетворяющего условию пластичности Губера-Мизеса.

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} = \sigma_s. \quad (8.11)$$

В соответствии с теорией пластического течения Сен-Венана-Леви-Мизеса скорости деформаций связаны с компонентами девиатора напряжений соотношениями:

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= \frac{3}{2} \frac{\dot{e}_i}{\sigma_i} s_x = \frac{\dot{e}_i}{\sigma_i} \left[\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z) \right]; \quad \dot{\gamma}_{xy} = 3 \frac{\dot{e}_i}{\sigma_i} \tau_{xy}; \\ \dot{e}_y &= \frac{3}{2} \frac{\dot{e}_i}{\sigma_i} s_y = \frac{\dot{e}_i}{\sigma_i} \left[\sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_x) \right]; \quad \dot{\gamma}_{yz} = 3 \frac{\dot{e}_i}{\sigma_i} \tau_{yz}; \\ \dot{e}_z &= \frac{3}{2} \frac{\dot{e}_i}{\sigma_i} s_z = \frac{\dot{e}_i}{\sigma_i} \left[\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \right]; \quad \dot{\gamma}_{zx} = 3 \frac{\dot{e}_i}{\sigma_i} \tau_{zx}. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Здесь \dot{e}_i - интенсивность скорости деформаций

$$\dot{e}_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\dot{e}_x - \dot{e}_y)^2 + (\dot{e}_y - \dot{e}_z)^2 + (\dot{e}_z - \dot{e}_x)^2 + \frac{3}{2}(\dot{\gamma}_{xy}^2 + \dot{\gamma}_{yz}^2 + \dot{\gamma}_{zx}^2)}. \quad (8.13)$$

Уравнения (12) удовлетворяют условию несжимаемости

$$\dot{e}_v = \dot{e}_x + \dot{e}_y + \dot{e}_z = 0. \quad (8.14)$$

Напряжения выражаются через скорости деформации с помощью гидростатического напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_x = s_x + \sigma &= \frac{3}{2} \frac{\sigma_i}{\dot{e}_i} \dot{e}_x + \sigma; \quad \tau_{xy} = \frac{\sigma_i}{3\dot{e}_i} \dot{\gamma}_{xy}; \\ \sigma_y = s_y + \sigma &= \frac{3}{2} \frac{\sigma_i}{\dot{e}_i} \dot{e}_y + \sigma; \quad \tau_{yz} = \frac{\sigma_i}{3\dot{e}_i} \dot{\gamma}_{yz}; \\ \sigma_z = s_z + \sigma &= \frac{3}{2} \frac{\sigma_i}{\dot{e}_i} \dot{e}_z + \sigma; \quad \tau_{zx} = \frac{\sigma_i}{3\dot{e}_i} \dot{\gamma}_{zx}. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Поскольку гидростатическое давление не связано со скоростью деформации, то нормальное напряжение нельзя определить однозначно, кроме случая, когда гидростатическое давление или одно из нормальных напряжений являются заданными.

Предположим, что объем тела V , а площадь поверхности S состоит из S_v и S_F частей. Скорости определены на S_v , внешние силы на S_F . Любое поле скоростей, удовлетворяющее условию несжимаемости в теле и граничным условиям в скоростях на границе S_v , является кинематически возможным.

Первый экстремальный принцип жесткопластического тела формулируется следующим образом: среди всех кинематически допустимых полей скоростей точное решение обеспечивает абсолютный минимум функционала

$$\Phi = \int_V \sigma_i \dot{\epsilon}_i dV - \int_{S_F} x_{ni} u_i dS. \quad (8.16)$$

Выражение (8.16) называют полной мощностью деформируемого тела. Здесь предполагается, что отсутствует поверхность разрыва скоростей. Первый член функционала (8.16) есть скорость рассеяния энергии пластической деформации, второй член – мощность внешних сил. Из этого принципа следует, что точное поле скоростей можно определить путем минимизации функционала (8.16). Используем конечные элементы для нахождения поля скоростей.

Принимая во внимание уравнение (8.8) и (8.13), можно записать первый и второй члены уравнения (8.16) для каждого элемента через скорости узлов

$$\Phi_1^{(e)} = \int \sigma_i \dot{\epsilon}_i(u_1, u_2, \dots, u_n) dV^{(e)}; \quad (8.17)$$

$$\Phi_2^{(e)} = -F_i u_i \text{ в узлах на } S_F \quad (8.18)$$

Заметим, что Φ - нелинейная функция узловых скоростей.

Глобальное представление функционала будет иметь вид

$$\Phi = \sum \int \sigma_i \dot{\epsilon}_i(u_1, u_2, \dots, u_n) dV - \sum_{S_F} F_i u_i. \quad (8.19)$$

Условия несжимаемости каждого элемента можно выразить через скорость узлов

$$\dot{V} = \dot{\epsilon}_v V = \sum h_k v_k = 0, \quad (8.20)$$

где $\dot{\epsilon}_v$ - скорость средней деформации изменения объема элемента, т.е.

$$\dot{V} = S(b_i U_i + c_i V_i + b_j U_j + c_j V_j + b_m U_m + c_m V_m) / 2 = 0. \quad (8.20')$$

Таким образом, задача формулируется следующим образом: найти набор скоростей узлов, минимизирующих нелинейный функционал (8.19) при заданных линейных ограничениях уравнения (8.20) и граничных условиях в скоростях.

8.7. Минимизация функционала. Составление системы линейных алгебраических уравнений. Их решение

Минимизация функционала (8.19) при заданных линейных ограничениях уравнения (8.20) вызывает значительные трудности ввиду его нелинейности. Линеаризация функционала позволяет применить метод линейного программирования для отыскания поля скоростей минимизирующего функционала (8.19) с учетом ограничения (8.20).

Предположим, что мы имеем набор скоростей узлов, аппроксимирующих точное решение u_{01}, u_{02}, \dots . Их часто называют затравочным полем скоростей. Можно получить оптимальное решение, добавляя к ним небольшие скоростные поправки du_1, du_2 и т.д.

Линеаризованные функции Φ и ограничения имеют вид

$$\Phi = \Phi_0 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial U_1} \right)_0 dU_1 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial U_2} \right)_0 dU_2 + \dots; \quad (8.21)$$

$$\dot{V} = \sum h_k U_{0k} + \sum h_k dU_k = 0, \quad (8.22)$$

где $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial U_1}\right)_0$, $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial U_2}\right)_0$, ... и Φ_0 - значения, вычисленные с помощью

затравочного поля скоростей.

К затравочным значениям прибавляют поправки, полученные методом линейного программирования. Новые значения скоростей, в свою очередь, используют в качестве затравочных на следующем шаге итерации. Эта процедура продолжается до тех пор, пока поправки не обратятся в нуль.

Процесс минимизации функционала значительно упрощается, если требования несжимаемости материала будет непосредственно введено в функционал. Эта идея получила реализацию в виде метода функций штрафа и метода множителей Лагранжа.

Согласно методу функций штрафа задача нахождения минимума функционала $\Phi(u_i)$ при наличии ограничивающих условий $\dot{e}_{ii} = 0$ эквивалентна минимизации нового функционала:

$$\psi(u_i) = \Phi(u_i) + \alpha \int_v \dot{e}_{ii}^2 dV, \quad (8.23)$$

где α - параметр штрафа – достаточно большое положительное число. Если в каком-либо из элементов \dot{e}_{ii} отлично от нуля, то за счет большого значения α общее значение функционала резко возрастает. Чем больше берется значение α , тем лучше удовлетворяется условие несжимаемости и тем точнее аппроксимация для поля скоростей. Следует отметить, что введение нового члена в функционал не приводит к увеличению числа неизвестных функций.

Согласно методу множителей Лагранжа модифицированный функционал имеет вид

$$\psi(u_i, \lambda_p) = \Phi(u_i) + \lambda_p \int \dot{e}_{ii}^2 dV, \quad (8.24)$$

где λ_p - множители Лагранжа, являющиеся неизвестными функциями для каждого элемента. Преимущество этого метода перед методом функций штрафа заключается в том, что величины $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, совпадают с компонентами гидростатического давления в элементе, но при этом возрастает количество неизвестных функций, что усложняет решение задачи.

Остановимся на методах минимизации функционалов (8.23) и (8.24). Простым, но отнимающим много времени является метод последовательных приближений, т.е. изменение скоростей узлов в направлении, соответствующем меньшему значению функционала.

Другим, более удачным методом, является следующий.

Поскольку новый функционал свободен от прежних ограничений, то его можно продифференцировать по скоростям узлов и результат приравнять к нулю

$$\frac{\partial \psi}{\partial U_1} = f_1(U_1, U_2, \dots, U_n) = 0; \quad (8.25)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial U_2} = f_2(U_1, U_2, \dots, U_n) = 0;$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial U_n} = f_n(U_1, U_2, \dots, U_n) = 0;$$

Полученную систему нелинейных уравнений можно решать методом итераций. С помощью затравочных скоростей и поправок к ним линеаризует уравнения для f_1, f_2, \dots, f_n :

$$f_1 = (f_1)_0 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial U_1}\right)_0 dU_1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial U_2}\right)_0 dU_2 + \dots,$$

$$f_2 = (f_2)_0 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial U_1}\right)_0 dU_1 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial U_2}\right)_0 dU_2 + \dots,$$
(8.26)

где $(f_1)_0, (f_2)_0, \dots$ и $\left(\frac{\partial f_1}{\partial U_1}\right)_0, \left(\frac{\partial f_1}{\partial U_2}\right)_0, \dots$ - величины, вычисленные с помощью затравочного поля скоростей.

Решая линеаризованные уравнения, определяем поправки для скоростей. Используя новое поле скоростей в качестве затравочного, продолжаем итерацию, пока результат не сойдется.

8.8. Определение напряжений в очаге деформации

а) **Метод интегрирования.** Напряжения в очаге деформации можно определить путем интегрирования дифференциального уравнения равновесия, если известны компоненты девиатора напряжений и гидростатическое напряжение в точке. Компоненты девиатора напряжений определяют с помощью найденного поля скоростей течения по соотношениям Сен-Венана-Леви-Мизеса. В случае плоской деформации из уравнений равновесия следует

$$\sigma_k = - \int_{y_0}^y \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial s_y}{\partial y} \right) \Big|_{x=x_0} dy + \sigma_{k_0},$$

$$\sigma_k = - \int_{x_0}^x \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial s_x}{\partial x} \right) \Big|_{y=y_0} dx + \sigma_{k_0},$$
(8.27)

где σ_{k_0} - известное значение в точке $x = x_0, y = y_0$.

б) **Метод множителей Лагранжа.** Минимизация функционала (8.19) при ограничениях (8.20) равносильна минимизации функционала (8.24) и приводит к системе уравнений:

$$\frac{\partial \psi}{\partial U_1} = 0; \quad \frac{\partial \psi}{\partial U_2} = 0; \quad \dots; \quad \frac{\partial \psi}{\partial U_n} = 0;$$
(8.28)

$$\frac{\partial \psi}{\partial \lambda_1} = 0; \dots \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_m} = 0,$$

относительно $n + m$ неизвестных $U_1, U_2, \dots, U_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$. Функция ψ в нашем случае имеет вид

$$\psi = \sum_k \left(\int \sigma_i \dot{e}_i dV \right)_k - \sum_e (F_i u_i)_e + \sum_k \lambda_k \dot{V}_k. \quad (8.29)$$

Поэтому имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} f_1(U_1, U_2, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) &= F_1; \quad f_2 = F_2, \dots, f_n = F_n; \\ \dot{V}_1 = (U_1, U_2, \dots, U_n) &= 0; \quad \dot{V}_2 = 0, \dots, \dot{V}_m = 0. \end{aligned} \quad (8.30)$$

Система уравнений (8.30) решается методом последовательных приближений с помощью затравочного поля скоростей и их поправок (полученных из линейной системы уравнений). Характерная черта этого метода - равенство множителей Лагранжа компонентам гидростатического давления при достижении функционала минимуму. Зная гидростатическое давление и девиаторы напряжений, вычисленные по найденному полю скоростей, определяют напряжения.

в) **Метод сжимаемости.**

Рассмотрим условие пластичности в форме

$$\sigma_i^* = \sqrt{0,5\{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)\} + \alpha \sigma_k^2}. \quad (8.31)$$

Это условие пластичности учитывает влияние гидростатического давления. При α , равном нулю, уравнение (8.31) совпадает с условием пластичности Мизеса. Учитывая это условие пластичности, напряжения можно выразить через скорости деформаций

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_i^*}{\dot{e}_i^*} \left\{ \dot{e}_x + \left(\frac{3}{2\alpha} - \frac{1}{3} \right) \dot{e}_v \right\}; \quad \tau_{xy} = \frac{\sigma_i^*}{3\dot{e}_i^*} \dot{\gamma}_{xy}; \\ \sigma_y &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_i^*}{\dot{e}_i^*} \left\{ \dot{e}_y + \left(\frac{3}{2\alpha} - \frac{1}{3} \right) \dot{e}_v \right\}; \quad \tau_{yz} = \frac{\sigma_i^*}{3\dot{e}_i^*} \dot{\gamma}_{yz}; \\ \sigma_z &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_i^*}{\dot{e}_i^*} \left\{ \dot{e}_z + \left(\frac{3}{2\alpha} - \frac{1}{3} \right) \dot{e}_v \right\}; \quad \tau_{zx} = \frac{\sigma_i^*}{3\dot{e}_i^*} \dot{\gamma}_{zx}, \end{aligned} \quad (8.32)$$

где \dot{e}_i^* - интенсивность скоростей деформаций:

$$\dot{e}_i^* = \sqrt{\frac{2}{9}\{(\dot{e}_x - \dot{e}_y)^2 + (\dot{e}_y - \dot{e}_z)^2 + (\dot{e}_z - \dot{e}_x)^2 + \frac{3}{2}(\dot{\gamma}_{xy}^2 + \dot{\gamma}_{yz}^2 + \dot{\gamma}_{zx}^2)\} + \frac{\dot{e}_v^2}{\alpha}}. \quad (8.33)$$

Из-за чувствительности условия пластичности к гидростатическому давлению материал при пластической деформации претерпевает изменение объема. Благодаря этому можно вычислить непосредственно напряжения, зная скорости деформаций. Рекомендуется α брать меньше 0,01.

Вариационное уравнение записывается в таком же виде, как и уравнение (8.16), только вместо σ_i и \dot{e}_i подставляется σ_i^* и \dot{e}_i^* .

$$\Phi^* = \int_V \sigma_i^* \dot{\epsilon}_i^* dV - \int_{S_F} x_{ni} u_i dS. \quad (8.34)$$

Минимизация функционала проводится, не используя условие постоянства объема, т.е.

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial U_1} = 0; \quad \frac{\partial \Phi^*}{\partial U_2} = 0; \quad \dots, \quad \frac{\partial \Phi^*}{\partial U_n} = 0; \quad (8.35)$$

Решение этой системы проводится так же, как и в предыдущих случаях.

8.9. Задача о раздате тонкостенной цилиндрической трубы внутренним давлением

Рассмотрим бесконечно длинную трубу радиусом R_0 и толщиной стенки S_0 , нагруженную внутренним давлением p . Из уравнения равновесия элемента трубы следует

$$\frac{\sigma_\theta}{R_0} = \frac{p}{S_0}. \quad (8.36)$$

Так как деформация плоская (труба бесконечно длинная), то $\sigma_\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_s = 2k$, σ_s - предел текучести материала, k - пластическая постоянная.

Тогда получим

$$\frac{p}{\sigma_s} = 2S_0 / \sqrt{3}R_0. \quad (8.37)$$

Пусть $R_0 = 100$ мм, а $S_0 = 2$ мм.

В этом случае

$$\frac{p}{\sigma_s} = 0,0231 \quad (8.38)$$

Теперь решим эту задачу методом конечных элементов. Поскольку задача осесимметричная и плоская, то достаточно рассмотреть элемент кольца толщиной S_0 , заключенный между двумя соседними радиусами, расположенными под углом α (рис. 8.3). Рассмотрим два выделенных треугольных элемента. Обозначим компоненты узловых скоростей в направлении оси x через u_i , а в направлении оси y через v_i , где i номер узла.

Определим компоненты узловых скоростей, считая, что оболочка равномерно раздается с единичной скоростью в радиальном направлении. Для этого сначала

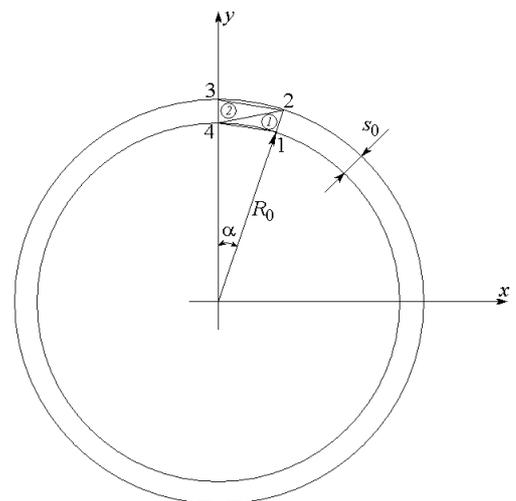


Рис. 8.3. Элемент кольца, заключенный между двумя соседними радиусами

найдем координаты узловых точек и компоненты скоростей в точках 1, 2, 3, 4, принимая угол $\alpha = 1^\circ$.

$$\begin{aligned} x_1 &= R_0 \sin \alpha = 1,7452; & y_1 &= R_0 \cos \alpha = 99,9848; & x_3 &= 0; & y_3 &= 102; \\ x_2 &= (R_0 + S_0) \sin \alpha = 1,7801; & y_2 &= (R_0 + S_0) \cos \alpha = 101,9845; & x_4 &= 0; & y_4 &= 100; \\ u_1 &= 1 \sin \alpha = 0,0175; & v_1 &= 1 \cos \alpha = 0,9998; & u_4 &= 0; & v_4 &= 1. \end{aligned}$$

В узлах 2 и 3 нам известно

$$u_2 = V_2 \operatorname{tg} \alpha \text{ и } u_3 = 0, \text{ остались неизвестными } v_2 \text{ и } v_3.$$

Определим для первого элемента по формулам (8.5)

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2 y_4 - x_4 y_2 = 178,010; & b_1 &= y_2 - y_4 = 1,9845; & c_1 &= x_4 - x_2 = -1,7801; \\ a_2 &= x_4 y_1 - x_1 y_4 = -174,52; & b_2 &= y_4 - y_1 = 0,015; & c_2 &= x_1 - x_4 = 1,7452; \\ a_4 &= x_1 y_2 - x_2 y_1 = -0,00001; & b_4 &= y_1 - y_2 = -1,9997; & c_4 &= x_2 - x_1 = 0,0349; \\ A_1 &= 1,7402 \text{ вычисляется по формуле (8.4).} \end{aligned}$$

Совершенно аналогично найдем для второго элемента

$$\begin{aligned} a_2 &= x_3 y_4 - x_4 y_3 = 0; & b_2 &= y_3 - y_4 = 2; & c_2 &= x_4 - x_3 = 0; \\ a_3 &= x_4 y_2 - x_2 y_4 = 178,0104; & b_3 &= y_4 - y_2 = -1,9845; & c_3 &= x_2 - x_4 = 1,780; \\ a_4 &= x_2 y_3 - x_3 y_2 = 181,5704; & b_4 &= y_2 - y_3 = -0,0155; & c_4 &= x_3 - x_2 = -1,7801; \\ A_2 &= 1,7801. \end{aligned}$$

Для определения неизвестных компонент v_2 и v_3 имеем два линейных алгебраических уравнения, представляющих собой условие несжимаемости каждого элемента (8.20').

Решая эти уравнения, находим $v_2 = 0,9798$, $v_3 = 0,9808$. В данном примере нам не потребовалось использовать итерационную процедуру для нахождения скоростей.

По формулам (8.8) определяем для элементов $\dot{e}_{x_1} = 0,0099964$, $\dot{\gamma}_{xy_1} = -0,000523$, $\dot{e}_{x_2} = 0,0096080$, $\dot{\gamma}_{xy_2} = 0,00006045$.

Используя (8.13) с учетом, что $\dot{e}_y = \dot{e}_x$; $\dot{\gamma}_{xz} = \dot{\gamma}_{yz} = \dot{e}_z = 0$, найдем $\dot{e}_{i_1} = 0,01153$, $\dot{e}_{i_2} = 0,01130$.

Рассмотрим функционал (8.19). Для действительной кинематики он обращается в нуль. Если мы его приравняем нулю для предложенного поля скоростей, то мы получим верхнюю оценку давления

$$\begin{aligned} \sigma_s (\dot{e}_{i_1} A_1 + \dot{e}_{i_2} A_2) &= p l V_4, \\ l &= \sqrt{(x_4 - x_1)^2 + (y_4 - y_1)^2} = 1,7452. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{p}{\sigma_s} = 0,02332.$$

Сравнивая полученное численное решение с аналитическим, видим, что они отличаются на 1 %.

Примеры решения задач

Задача 1. Найти силу осадки пластически однородной полосы между двумя жесткими плитами, сближающимися со скоростями v_1 . Известны размеры полосы b и h , а также предел текучести материала полосы при сдвиге k . Схема процесса осадки пластически однородной полосы и кинематически допустимое поле скоростей показаны на рис. 8.4.

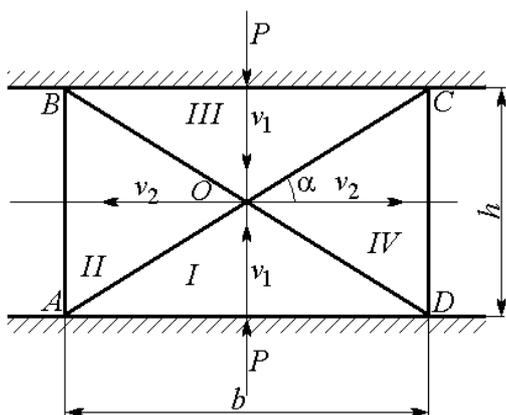


Рис. 8.4. Схема процесса осадки пластически однородной полосы и кинематически допустимое поле скоростей

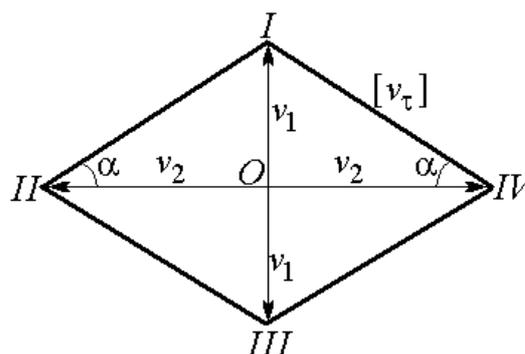


Рис. 8.5. Голограф скоростей

Решение. Предполагаем, что длина a полосы значительно больше ширины b и толщины h , т.е. $a \gg b, a \gg h$, так что деформацию можно считать плоской. В поперечном сечении линии OA, OB, OC, OD являются линиями разрыва скоростей (следами плоскостей разрыва, перпендикулярными плоскости чертежа).

В силу условия несжимаемости на этих линиях непрерывны нормальные составляющие скоростей, а разрывы касательных составляющих, как это следует из голографа скоростей (рис. 8.5), определяется следующим образом:

$$[v_\tau] = \frac{v_1}{\sin \alpha} = \frac{v_1}{h} \sqrt{b^2 + h^2}.$$

Длина любой линии разрыва

$$l = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 + h^2}.$$

Определим суммарную мощность разрыва

$$N_q = 4k[v_\tau]l a = 2k v_1 a \frac{b^2 + h^2}{h}. \quad (8.39)$$

Мощность внешних сил

$$N_e = 2P v_1 = 2qabv_1,$$

где P и q - сила и удельная сила осадки полосы.

По теореме о верхних оценках

$$N_\varepsilon \leq N_q.$$

Отсюда находим

$$q \leq k \left(\frac{b}{h} + \frac{h}{b} \right),$$

т.е. верхняя оценка q^* удельной силы осадки составляет

$$q^* = k \left(\frac{b}{h} + \frac{h}{b} \right). \quad (8.40)$$

Верхние оценки силы и мощности осадки определяются:

$$P^* = q^* ab; \quad N^* = 2P^* v_1. \quad (8.41)$$

Задача 2. Найдем силу вдавливания жесткого плоского штампа в пластическое полупространство. Деформацию считаем плоской. Предел текучести материала при сдвиге равен k . Схема процесса выдавливания и кинематически допустимое поле скоростей показаны на рис. 8.6.

Поле скоростей характеризуется единственным параметром – углом α , подлежащим определению из условия минимума мощности деформации.

Из годографа скоростей (рис. 8.7) следует

$$v_2 = [v_\tau]_{02} = v_4 = [v_\tau]_{04} = v_1 \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$[v_\tau]_{12} = [v_\tau]_{14} = v_1 \operatorname{cosec} \alpha;$$

$$v_3 = [v_\tau]_{03} = v_5 = [v_\tau]_{05} = [v_\tau]_{23} = [v_\tau]_{45} = \frac{v_1}{2} \operatorname{cosec} \alpha.$$

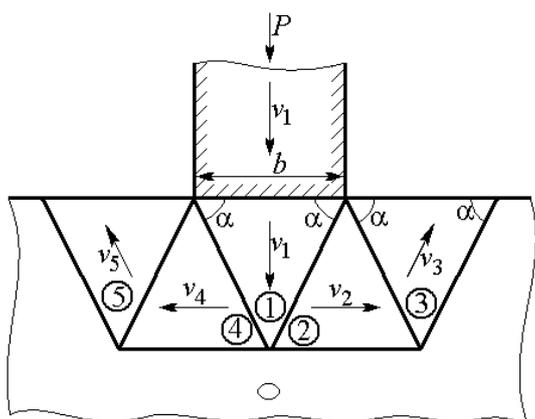


Рис. 8.6. Схема процесса выдавливания и кинематически допустимое поле скоростей

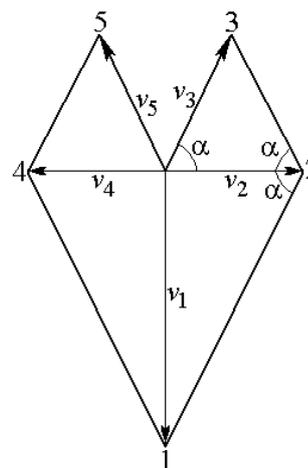


Рис. 8.7. Годограф скоростей

Определяем длины линий разрыва:

$$l_{12} = l_{14} = l_{23} = l_{45} = l_{03} = l_{05} = \frac{b}{2} \sec \alpha;$$

$$l_{02} = l_{04} = b.$$

Находим мощность разрыва

$$N_q = ka(l_{12}[v_\tau]_{12} + l_{14}[v_\tau]_{14} + l_{23}[v_\tau]_{23} + l_{45}[v_\tau]_{45} +$$

$$+ l_{02}[v_\tau]_{02} + l_{04}[v_\tau]_{04} + l_{03}[v_\tau]_{03} + l_{05}[v_\tau]_{05}) =$$

$$= 2kabv_1(3 + \cos 2\alpha) \operatorname{cosec} 2\alpha,$$

где a - размер штампа в направлении, перпендикулярном к плоскости рисунка.

Мощность внешних сил

$$N_g = P v_1 = qabv_1.$$

По теореме о верхних оценках получаем

$$q^* = 2k(3 + \cos 2\alpha) \operatorname{cosec} 2\alpha.$$

Угол α , при котором q^* имеет минимум, найдем из уравнения

$$\frac{dq^*}{d\alpha} = 0,$$

получающего после преобразований вид

$$1 + 3 \cos 2\alpha = 0.$$

Отсюда следует

$$\cos 2\alpha = -\frac{1}{3}; \quad 2\alpha = 109^\circ 30'; \quad \alpha = 54^\circ 45';$$

$$\operatorname{cosec} 2\alpha = \frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

Легко проверить, что при найденном значении

$$\frac{d^2 q^*}{d\alpha^2} > 0,$$

что соответствует минимуму q^* .

Верхняя оценка удельной силы при этом будет

$$q^* = 4\sqrt{2}k = 5,64k, \quad (8.42)$$

что лишь на 9,8 % превышает точное значение

$$q = (2 + \pi)k = 5,14k,$$

найденное впервые Л. Прандтлем.

Верхние оценки силы и мощности вдавливания штампа в пластическое полупространство находятся по формулам

$$P^* = q^* ab; \quad N^* = P^* v_1, \quad (8.43)$$

где для $q^* = 4\sqrt{2}k = 5,64k$

Задача 3. Найти силу закрытой прошивки полосы пуансоном, перемещающимся относительно контейнера со скоростью v_1 . Предел текучести материала полосы при сдвиге равен k . Геометрические размеры инструмента известны. Трением пренебречь. Схема процесса закрытой прошивки полосы показана на рис. 8.8.

Решение. Кинематически допустимое поле скоростей в этом случае зависит от параметра h (рис. 8.9), физический смысл которого состоит в том, что h определяет глубину проникновения пластической деформации.

Из годографа скоростей (рис. 8.9) следует:

$$v_2 = [v_\tau]_{02} = v_4 = [v_\tau]_{04} = \frac{b}{2h} v_1; \quad v_3 = v_5 = \frac{b}{c-b} v_1;$$

$$[v_{12}] = [v_\tau]_{14} = \frac{\sqrt{b^2 + 4h^2}}{2h} v_1; \quad [v_\tau]_{23} = [v_\tau]_{45} = \frac{b\sqrt{(c-b)^2 + 4h^2}}{2h(c-b)} v_1.$$

Определяем длины линий разрыва:

$$l_{12} = l_{14} = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 + 4h^2}; \quad l_{23} = l_{45} = \frac{1}{2} \sqrt{(c-b)^2 + 4h^2}; \quad l_{02} = l_{04} = \frac{c}{2}.$$

Находим мощность разрыва:

$$N_q = ka(l_{12}[v_\tau]_{12} + l_{14}[v_\tau]_{14} + l_{23}[v_\tau]_{23} + l_{45}[v_\tau]_{45} + l_{02}[v_\tau]_{02} + \\ + l_{04}[v_\tau]_{04}) = kacv_1 \left(\frac{b}{h} + \frac{2h}{c-b} \right),$$

где a - размер в направлении, перпендикулярном к плоскости рисунка.

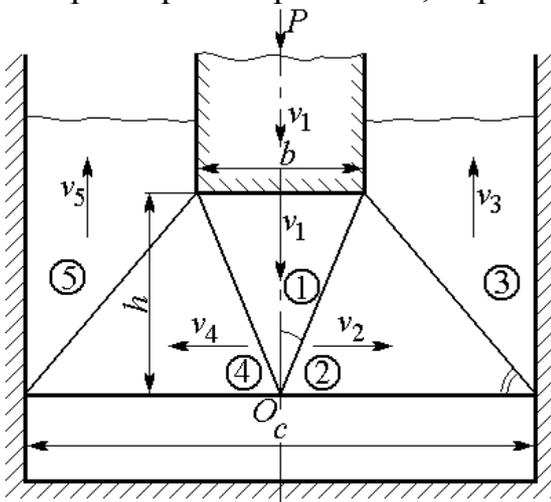


Рис. 8.8. Схема процесса закрытой прошивки полосы

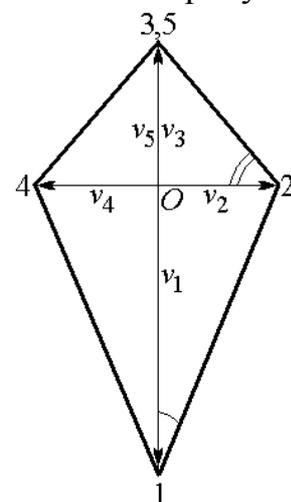


Рис. 8.9. Кинематически допустимое поле скоростей

Мощность внешних сил

$$N_g = P v_1 = qabv_1.$$

По теореме о верхних оценках получаем

$$q^* = \frac{kc}{b} \left(\frac{b}{h} + \frac{2h}{c-b} \right).$$

Наилучшая (т.е. наименьшая) верхняя оценка соответствует значению параметра h , определяемого из уравнения

$$\frac{dq^*}{dh} = \frac{kc}{b} \left(-\frac{b}{h^2} + \frac{2}{c-b} \right) = 0.$$

Отсюда находим

$$h = \sqrt{\frac{b(c-b)}{2}}.$$

Подставляя это значение h в формулу для q^* , окончательно получаем

$$q^* = \frac{2\sqrt{2}x}{\sqrt{x-1}}k; \quad x = \frac{c}{b}. \quad (8.44)$$

Верхние оценки силы и мощности находятся по формулам (8.43), куда вместо q^* подставляется величина, рассчитанная по формуле (8.44).

Список литературы

1. Теория обработки металлов давлением: учебник для вузов / В.А. Голенков, [и др.] // Под ред. В.А. Голенкова, С.П. Яковлева. М.: Машиностроение, 2009. 442 с.: ил.
2. Мейз Д. Теория и задачи механики сплошных сред. М.: “Мир”, 1974.
3. Губкин С.И. Пластическая деформация металлов. М.: Metallurgia, 1960. Т.1. 376 с., Т.2. 416 с., Т.3. 306 с.
4. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969.
5. Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969.
6. Томленов А.Д. Теория пластического деформирования металлов. М.: Metallurgia, 1972.
7. Сторожев М.В., Попов Е.А. Теория обработки металлов давлением. М.: Машиностроение, 1977. 423 с.
8. Унксов Е.П. Инженерная теория пластичности. М.: Машгиз, 1959. 328 с.

Приложение 2
Текст программы

```

using System;
using System.Drawing;
using System.Collections;
using System.ComponentModel;
using System.Windows.Forms;
using System.Data;
using System.IO;
using System.Reflection;
using System.Diagnostics;
using Microsoft.Office.Core;
using System.Runtime.Serialization;
using System.Runtime.Serialization.Formatters.Binary;

```

```

namespace Fulldrawing

```

```
{
```

```
    public enum TypesOfDarawing {ReversTwoTors=0,ReverceFull = 1}
```

```
    public class Form1 : System.Windows.Forms.Form
```

```
{
```

```
        public int IsStakan = 0;
```

```
        Subject subject=new Subject();
```

```
        IntermediateDataClass
```

```
        IntermediateData=new
```

```
IntermediateDataClass(TypesOfDarawing.ReversTwoTors);
```

```
        ArrayList Parray=new ArrayList();
```

```
        [STAThread]
```

```
        static void Main()
```

```
{
```

```
            Application.Run(new Form1());
```

```
}
```

```
        private void Form1_Load(object sender, System.EventArgs e)
```

```
{
```

```
            DeSerializeParms();
```

```
            if (ArrayParms.AlParms.Count!=0)
```

```
{
```

```
                DisplayParms(true);
```

```
}
```

```
            //DataForTitan_Click(new object(),new System.EventArgs());
```

```
            if(rb_rn.Checked)
```

```
                label10.Text="rn";
```

```
            if(rb_rn_1.Checked)
```

```
                label10.Text="rn_1";
```

```
            DataForAlumin_Click(new object(),new System.EventArgs());
```

```

    }
    private bool Culculation(ref drawing drawingax)
    {
        //ref//CalculateOperation CalcOper=new CalculateOperation();
        //ParmsIn CurrParms = new ParmsIn();
        //!!! DisplayParms(true);

        //CurrParms=(ParmsIn)ArrayParms.AllParms[ArrayParms.CurPass-1];
        //bool rez=true;
        //Если первый переход, обнулить накопленные данные

        if
(ExcelTitan.LimitDamaginPassCount!=IntermediateData.LimitDamaginPassCount)

        MessageBox.Show("ExcelTitan.LimitDamaginPassCount!=IntermediateData.Limit
DamaginPassCount !");
        if(IntermediateData.LimitDamaginPassCount!=2           ||
drawing.ALw_e_inH==null)
        {
            drawingax.CumulativeDataInit();
            IntermediateData.SetOptionsVSDrawingState(ref
drawingax);
        }
        drawing.IsPassfirst=true;
        //Получит Н
        for(int Pass=1; Pass<=2; Pass++)
        {
            if(Pass==2)
            {
                if (IntermediateData.LimitDamaginPassCount==1)
                    break;
                drawing.IsPassfirst=false;
                drawingax = new drawing();
                /////
                Titan=1;
                tb_H.Text="70";
                tBq.Text="7,5";
                if(ExcelTitan.Pass==2)
                {
                    if(ExcelTitan.md!=0d)
                        tBm_d.Text=ExcelTitan.md.ToString();
                    if(ExcelTitan.q!=0d)
                        tBq.Text=ExcelTitan.q.ToString();
                    if(ExcelTitan.mu!=0d)
                        tBmu.Text=ExcelTitan.mu.ToString();
                }
            }
        }
    }
}

```

```

        if(ExcelTitan.Rm!=0d)
            tBRm.Text=ExcelTitan.Rm.ToString();
        if(ExcelTitan.Rpr!=0d)
            tBRpr.Text=ExcelTitan.Rpr.ToString();
        if(ExcelTitan.rn_1!=0)
            drawingax.rn_1=ExcelTitan.rn_1;
        if(ExcelTitan.rn!=0)
        {
            drawingax.rn=ExcelTitan.rn;
        }
    }
else
    tBm_d.Text="0,826";
if (ExcelTitan.LimitDamaginPassCount!=2)
{
    double rn=949.5d/2d;
    tBrn.Text=rn.ToString();
}
///
///ref///DisplayParms(true);

//if (ArrayParms.CurPass >
ArrayParms.AIParms.Count) return true;

//CurrParms=(ParmsIn)ArrayParms.AIParms[ArrayParms.CurPass-1];

//H=double.Parse(tb_H.Text);
//if (CurrParms.H!=0.0) H=CurrParms.H;
Initial(drawingax);
if(ExcelTitan.Pass==2)
{
    drawingax.rn_1=ExcelTitan.rn_1;
}
}
int i=0;
while(true)
{
    if(IntermediateData.OnlyOneCountInPass1==true)
    {
        IntermediateData.OnlyOneCountInPass1=false;
        break;
    }
    //drawingax.H=(double)H;

```

```

drawingax.pointsInH=(double)i;

if(drawingax.HInStock(<0.0) break;
//if (i == 50 )
//MessageBox.Show("Стакан!!!");
//if(!drawingax.CalcOper()) return false;
//if(!drawingax.CalcOper()) return false;
drawingax.Calc();
if(i==0 /*&& Pass==ExcelTitan.Pass*/)
IntermediateData.AddPrelative(drawingax.Prelative());//ref//ExcelTitan.AddPrelative(dra
wingax.Prelative());

drawingax.FileOperations(@"c:\temp\"+textBox2.Text,subject.IsrnFixed
/*rb_headers.Checked*/);

if ( drawingax.isExit == true) return true;
if (drawing.iToH == i)
{
return true;
}
if ((double)drawingax.ALP[drawingax.ALP.Count-
1] == 0d)
{
MessageBox.Show("Сила P = 0!!!");
return true;
}
//if(drawing.IsPassfirst==false)//Для момента
соприкосновения пунсона для Графиков Пред Повр для второго прохода
// break;
//!!!Для построения графиков при H=150(Первый
проход), закомментировать следующий if
//if(ExcelTitan.LimitDamaginPassCount==1)
// break;
/*if(drawingax.HInStock()-
drawingax.ElementarySquare<0.0)
{
//!!!if(Pass==ExcelTitan.Pass)

ExcelTitan.AddPrelative(drawingax.Prelative());
break;
}*/
double rn=drawingax.rn;
drawingax = new drawing();
//if(drawing.IsPassfirst==true)
// drawingax.rn_1=rn_1;

```

```

        drawingax.rn=rn;//Для      sigmaRHO=sigmaS
для первого прохода для H=150
        Initial(drawingax);
        if (subject.rn_1 != -1)
        {
                drawingax.rn_1 = subject.rn_1;
                drawingax.Rm      =      (drawingax.rn_1      -
drawingax.rn)/ 2d;
        }
        if(drawing.IsPassfirst==true)
        {
                //drawingax.rn_1=rn_1;
                drawingax.rn=rn;//Для      sigmaRHO=sigmaS
для первого прохода для H=150
        }
        if(ExcelTitan.Pass==2)
        {
                drawingax.rn_1=ExcelTitan.rn_1;
        }
        i++;
    }
    }
    return true;
}
private drawing LimitingDamagingChangeRN(ParmsIn  ParmS,bool
print,double LDw_e)
{
        drawing drawingax;
        double h=10d, tekw_e=0d,predmd=0d;
        double rn, rn_1; //rn_1 - постоянная величина
        double exactness=0.01;
        int ItarationCount=1;
        do
        {
                drawingax = new drawing();
                Initial(drawingax,Parms);
                rn=drawingax.rn;
                rn_1=drawingax.rn_1;
                Culculation(ref drawingax);
                do
                {
                        drawingax=new drawing();
                        rn=rn+h; //drawingax.rn=rn;
                        ParmS.rn=rn;
                        drawingax.rn_1=rn_1;

```

```

        Initial(drawingax,Parms);
        Culculation(ref drawingax);

    tekw_e=(double)drawingax.ALw_e[drawingax.ALw_e.Count-1];
        }
        while(tekw_e<LDw_e-0.01);
        rn=rn-h; h=h/10d;
        ItarationCount++;
        if(print==true)

    drawingax.FileOperations(@"c:\temp\"+textBox3.Text,rb_headers.Checked);
        if((LDw_e-exactness<=tekw_e
tekw_e<=LDw_e+exactness))
        {
            predmd=drawingax.rn/drawingax.rn_1;
            break;
        }
        else if(tekw_e>LDw_e+exactness)
        {
            predmd=drawingax.rn/drawingax.rn_1;
            break;
        }
    }
    while(true);
    return drawingax;
}
private drawing LimitingDamaging(ParmsIn Parms,bool print,double
LDw_e)
{
    //double
    LDw_e=double.Parse(TBLimitingDamaging.Text.Replace(".",","));
    drawing drawingax;
    double h=10d, tekw_e=0d,predmd=0d;
    double rn_1;
    double exactness=0.01;
    int ItarationCount=1;
    do
    {
        drawingax = new drawing();
        Initial(drawingax,Parms);
        rn_1=drawingax.rn_1;
        Culculation(ref drawingax);
        do
        {
            drawingax=new drawing();

```

```

        rn_1=rn_1+h; drawingax.rn_1=rn_1;
        Initial(drawingax,Parms);
        Culculation(ref drawingax);

    tekw_e=(double)drawingax.ALw_e[drawingax.ALw_e.Count-1];
    }
    while(tekw_e<LDw_e-0.01);
    rn_1=rn_1-h; h=h/10d;
    ItarationCount++;
    if(print==true)

    drawingax.FileOperations(@"c:\temp\"+textBox3.Text,rb_headers.Checked);
    if((LDw_e-exactness<=tekw_e
tekw_e<=LDw_e+exactness))
    {
        predmd=drawingax.rn/drawingax.rn_1;
        break;
    }
    else if(tekw_e>LDw_e+exactness)
    {
        predmd=drawingax.rn/drawingax.rn_1;
        break;
    }
    }
    while(true);
    return drawingax;
}
private drawing AxesExertion(ParmsIn Parms)
{
    drawing.IsLimitDamaging=true;
    drawing drawingax;
    double h=10d, predmd=0d;
    double Fi_1, Fi=0.0d;
    //          double rn_1=1153.4d;
    double rn_1;
    int ItarationCount=1;
    do
    {
        drawingax = new drawing();
        Initial(drawingax,Parms);
        rn_1=drawingax.rn_1;
        //drawingax.rn_1=rn_1;
        Culculation(ref drawingax);
        double
Sigmarho3=(double)drawingax.ALsigmarho[drawingax.ALsigmarho.Count-1];

```

```

        double
        Sigmas3=(double)drawingax.ALsigmas[drawingax.ALsigmas.Count-1];
        Fi_1=Sigmarho3-Sigmas3;
        Fi=0.0d;
        do
        {
            drawingax=new drawing();
            rn_1=rn_1+h; drawingax.rn_1=rn_1;
            Initial(drawingax,Parms);
            //drawingax.s0=double.Parse(textBox2.Text);
            if(Fi!=0.0d)
                Fi_1=Fi;
            Culculation(ref drawingax);

        Sigmarho3=(double)drawingax.ALsigmarho[drawingax.ALsigmarho.Count-1];

        Sigmas3=(double)drawingax.ALsigmas[drawingax.ALsigmas.Count-1];

            Fi=Sigmarho3-Sigmas3;
        }
        while(Fi*Fi_1>0.0);
        rn_1=rn_1-h; h=h/10d;
        ItarationCount++;
        //drawingax.FileOperations(@"c:\temp\"+textBox1.Text);
        predmd=drawingax.md;
    }
    while(Fi>=10.0d || Fi<=-10.0d );
    drawing.IsLimitDamaging=false;
    return drawingax;
}
private void button1_Click(object sender, System.EventArgs e)
{
    drawing drawingax;
    double h=10d, predmd=0d;
    double Fi_1, Fi=0.0d;
    //double rn_1=0d, rn=0d;
    int ItarationCount=1;
    do
    {
        drawingax = new drawing();
        Initial(drawingax);
        if(subject.IsrnFixed==true)
            subject.rn_1=drawingax.rn_1;
        else
            subject.rn=drawingax.rn;
    }

```

```

/*if(rb_rn.Checked==true)
    rn_1=drawingax.rn_1;
else
    rn=drawingax.rn;//ref*/

Culculation(ref drawingax);
double Sigmarho3=drawingax.GetLastSigmarho3();
double Sigmas3=drawingax.GetLastSigmas3();
Fi_1=Sigmarho3-Sigmas3;
Fi=0.0d;
do
{
    drawingax=new drawing();
    if(subject.IsrnFixed==true)
    {
        subject.rn_1+=h;
        drawingax.rn_1=subject.rn_1;
        //ref//rn_1=rn_1+h; drawingax.rn_1=rn_1;
    }
    else
    {
        subject.rn-=h; drawingax.rn=subject.rn;
    }
    Initial(drawingax);
    if(Fi!=0.0d) Fi_1=Fi;
    Culculation(ref drawingax);
    Sigmarho3=drawingax.GetLastSigmarho3();
    Sigmas3=drawingax.GetLastSigmas3();
    Fi=Sigmarho3-Sigmas3;
}
while(Fi*Fi_1>0.0);
if(subject.IsrnFixed==true)
    subject.rn_1=subject.rn_1-h;
else
    subject.rn=subject.rn+h;
h=h/10d;
ItarationCount++;

drawingax.FileOperations(@"c:\temp\"+textBox1.Text,rb_headers.Checked);
    predmd=drawingax.md;
}
while(Fi>=10.0d || Fi<=-10.0d );

drawingax.FileOperations(@"c:\temp\"+textBox1.Text,rb_headers.Checked);
    MessageBox.Show("Предельное md="+predmd.ToString());

```

```

        /*drawingax.Tor1(10);//Расчет по первому уч
        drawingax.Plane2(10);//Второй уч
        drawingax.Tor3(10);//Третий уч
        drawingax.FileOperations(@"c:\temp\"+textBox1.Text);*/
    }

    private void Vich(ref drawing drawingax, double rn)
    {
        if(rn>0d)
            drawingax.rn=rn;
            drawingax.Tor1();
            drawingax.Plane2(10);
            drawingax.Tor3(10,3);
    }
    private void Vich(ref drawing drawingax)//NEW
    {
        drawingax.Tor1();
        drawingax.Plane2(10);
        drawingax.Tor3(10,3);
    }
    private void button2_Click(object sender, System.EventArgs e)
    {

    }

    private void button3_Click(object sender, System.EventArgs e)
    {

    }
    private ParmsIn ParmsForTitan()
    {
        ParmsIn Parms=new ParmsIn();
        Parms.sigma02=600.8f;
        Parms.A=502.44f;
        Parms.n=0.559f;
        Parms.R=2;
        Parms.sigmax=375;
        Parms.Sigma=1.2365;
        //Parms.Sigma=0.86365;
        Parms.U=-1.3375f;

        double rn=1149.5d/2d;
    }

```

```

        Parms.rn=rn;
        Parms.s0=3.5f;
        Parms.md=0.827f;
        Parms.Rpr=40f;
        Parms.Rm=40f;
        Parms.mu=0.05;
        Parms.q=5f;
        return Parms;
    }
private ParmsIn ParmsForSteel()
{
    if(Titan==1)
    {
        return ParmsForTitan();
    }
    ParmsIn Parms=new ParmsIn();
    Parms.sigma02=274f;
    Parms.A=359.1f;
    Parms.n=0.505f;
    Parms.R=0.8;
    Parms.sigmab=375;
    Parms.Sigma=1.856;
    Parms.U=-1.24f;

    Parms.rn=950f;
    Parms.s0=3.5f;
    Parms.md=0.8f;
    Parms.Rpr=50f;
    Parms.Rm=50;
    Parms.mu=0.05;
    Parms.q=2f;
    return Parms;
}
private ParmsIn ParmsForAlumimium()
{
    ParmsIn ParmsAl=new ParmsIn();
    ParmsAl.sigma02=195.7f;
    ParmsAl.A=277.24f;
    ParmsAl.n=0.256f;
    ParmsAl.R=0.6;
    ParmsAl.sigmab=375;
    ParmsAl.Sigma=0.716;
    ParmsAl.U=-1.24f;

    ParmsAl.rn=950f;

```

```

        ParmsAl.s0=3.5f;
        ParmsAl.md=0.8f;
        ParmsAl.Rpr=50f;
        ParmsAl.Rm=50;
        ParmsAl.mu=0.05;
        ParmsAl.q=2f;
        return ParmsAl;
    }
private void MprVSqTitan(ArrayList DatasForExcel)
{
    DataForExcel Obj_Data;
    Obj_Data=new DataForExcel();
    Obj_Data.AddAL(5);
    Obj_Data.AddToCurrentSieres(0,"q");
    Obj_Data.AddToCurrentSieres(1,"(Сталь)mdpr по осевому
напряжению");
    Obj_Data.AddToCurrentSieres(2,"(Сталь)mdpr по
деформации(1)");
    Obj_Data.AddToCurrentSieres(3,"(Сталь)mdpr по
деформации(0,65)");
    Obj_Data.AddToCurrentSieres(4,"(Сталь)mdpr по
деформации(0,25)");
    DatasForExcel.Add(Obj_Data);
    ParmsIn Parms=ParmsForSteel();
    for(double q=0.0; q<=6;q+=1)
    {
        Parms.Rm=50.0;
        Parms.Rpr=Parms.Rm;
        Parms.q=q;
        drawing drawingax=AxesExertion(Parms);
        //Obj_Data.AddToCurrentSieres(0,q);
        Obj_Data.AddToCurrentSieres(0,drawingax.qrelative());
        Obj_Data.AddToCurrentSieres(1,drawingax.md);
        drawingax=LimitingDamaging(Parms,false,1d);
        Obj_Data.AddToCurrentSieres(2,drawingax.md);

        drawingax=LimitingDamaging(Parms,false,0.65d);
        Obj_Data.AddToCurrentSieres(3,drawingax.md);

        drawingax=LimitingDamaging(Parms,false,0.25d);
        Obj_Data.AddToCurrentSieres(4,drawingax.md);
    }
}

```

```

Obj_Data=new DataForExcel();
Obj_Data.AddAL(5);
Obj_Data.AddToCurrentSieres(0,"q");
Obj_Data.AddToCurrentSieres(1,"(Аллюминий)mdpr по
осевому напряжению");
Obj_Data.AddToCurrentSieres(2,"(Аллюминий)mdpr по
деформации");
Obj_Data.AddToCurrentSieres(3,"(Аллюминий)mdpr по
деформации");
Obj_Data.AddToCurrentSieres(4,"(Аллюминий)mdpr по
деформации");

```

```

DatasForExcel.Add(Obj_Data);
ParmsIn ParmsAl=ParmsForAlumimium();
for(double q=0.0; q<=6;q+=1)
{
    ParmsAl.Rm=50.0;
    ParmsAl.Rpr=ParmsAl.Rm;
    ParmsAl.q=q;
    drawingax=AxesExertion(ParmsAl);
    Obj_Data.AddToCurrentSieres(0,drawingax.qrelative());
    Obj_Data.AddToCurrentSieres(1,drawingax.md);
    drawingax=LimitingDamaging(ParmsAl,false,1d);
    Obj_Data.AddToCurrentSieres(2,drawingax.md);

    drawingax=LimitingDamaging(ParmsAl,false,0.65d);
    Obj_Data.AddToCurrentSieres(3,drawingax.md);

    drawingax=LimitingDamaging(ParmsAl,false,0.25d);
    Obj_Data.AddToCurrentSieres(4,drawingax.md);
}
}

```

```

private void MprVSq(ArrayList DatasForExcel)
{
    DataForExcel Obj_Data;
    Obj_Data=new DataForExcel();
    Obj_Data.AddAL(5);
    Obj_Data.AddToCurrentSieres(0,"q");
    Obj_Data.AddToCurrentSieres(1,"(Сталь)mdpr по осевому
напряжению");
    Obj_Data.AddToCurrentSieres(2,"(Сталь)mdpr по
деформации(1)");
    Obj_Data.AddToCurrentSieres(3,"(Сталь)mdpr по
деформации(0,65)");
}

```

```

деформации(0,25)");
Obj_Data.AddToCurrentSieres(4,"(Сталь)mdpr                                по
DatasForExcel.Add(Obj_Data);
ParmsIn Parms=ParmsForSteel();
for(double q=0.0; q<=6;q+=1)
{
    Parms.Rm=50.0;
    Parms.Rpr=Parms.Rm;
    Parms.q=q;
    drawing drawingax=AxesExertion(Parms);
    //Obj_Data.AddToCurrentSieres(0,q);
    Obj_Data.AddToCurrentSieres(0,drawingax.qrelative());
    Obj_Data.AddToCurrentSieres(1,drawingax.md);
    drawingax=LimitingDamaging(Parms,false,1d);
    Obj_Data.AddToCurrentSieres(2,drawingax.md);

    drawingax=LimitingDamaging(Parms,false,0.65d);
    Obj_Data.AddToCurrentSieres(3,drawingax.md);

    drawingax=LimitingDamaging(Parms,false,0.25d);
    Obj_Data.AddToCurrentSieres(4,drawingax.md);
}
Obj_Data=new DataForExcel();
Obj_Data.AddAL(5);
Obj_Data.AddToCurrentSieres(0,"q");
Obj_Data.AddToCurrentSieres(1,"(Аллюминий)mdpr                                по
осевому напряжению");
Obj_Data.AddToCurrentSieres(2,"(Аллюминий)mdpr                                по
деформации");
Obj_Data.AddToCurrentSieres(3,"(Аллюминий)mdpr                                по
деформации");
Obj_Data.AddToCurrentSieres(4,"(Аллюминий)mdpr                                по
деформации");

DatasForExcel.Add(Obj_Data);
ParmsIn ParmsAl=ParmsForAlumimium();
for(double q=0.0; q<=6;q+=1)
{
    ParmsAl.Rm=50.0;
    ParmsAl.Rpr=ParmsAl.Rm;
    ParmsAl.q=q;
    drawing drawingax=AxesExertion(ParmsAl);

```

```

Obj_Data.AddToCurrentSieres(0,drawingax.qrelative());
Obj_Data.AddToCurrentSieres(1,drawingax.md);
drawingax=LimitingDamaging(ParmsAl,false,1d);
Obj_Data.AddToCurrentSieres(2,drawingax.md);

drawingax=LimitingDamaging(ParmsAl,false,0.65d);
Obj_Data.AddToCurrentSieres(3,drawingax.md);

drawingax=LimitingDamaging(ParmsAl,false,0.25d);
Obj_Data.AddToCurrentSieres(4,drawingax.md);

    }
}
private drawing InitCulcForDrawing(ParmsIn Parms)
{
    drawing.ALeps_e_inH=new ArrayList();
    drawing.ALeps_e_pred=new ArrayList();
    drawing.ALr0=new ArrayList();
    drawing.ALw_e_inH=new ArrayList();
    drawing.ALw_e_pred=new ArrayList();
    drawing.ElemSquareStatic=0.0;
    drawing.IsPassfirst=true;

    drawing drawingax = new drawing();
    Initial(drawingax,Parms);
    Culculation(ref drawingax);
    return drawingax;
}
private void ExcelReport_Click(object sender, System.EventArgs e)
{
}
//Excel Automation variables:
Excel.Application xlApp;
Excel.Workbook xlBook;
Excel.Worksheet xlSheet1;
//Excel event delegate variables:
Excel.AppEvents_WorkbookBeforeCloseEventHandler
EventDel_BeforeBookClose;
Excel.DocEvents_ChangeEventHandler EventDel_CellsChange;

private void StartExcelAndSinkEvents(ArrayList DatasForExcel)
{ //Start Excel, and then create a new workbook.
    xlApp = new Excel.Application();
    xlBook = xlApp.Workbooks.Add( Missing.Value );
}

```

```

xlBook.Windows.get_Item(1).Caption = "XL Event Test";
xlSheet1 = (Excel.Worksheet)xlBook.Worksheets.get_Item(1);
DrawDiagrams(DatasForExcel);
xlSheet1.Activate();
//Add an event handler for the WorkbookBeforeClose Event of
the
//Application object.
Excel.AppEvents_WorkbookBeforeCloseEventHandler( BeforeBookClose) = new
Excel.AppEvents_WorkbookBeforeCloseEventHandler( BeforeBookClose);
xlApp.WorkbookBeforeClose += EventDel_BeforeBookClose;
//Add an event handler for the Change event of both worksheet
objects.
Excel.DocEvents_ChangeEventHandler( CellsChange) = new
Excel.DocEvents_ChangeEventHandler( CellsChange);
xlSheet1.Change += EventDel_CellsChange;
//Make Excel visible and give the user control.
xlApp.Visible = true;
xlApp.UserControl = true;
}
private void DrawDiagrams(ArrayList DatasForExcel)
{
Excel.ChartObjects charts =
(Excel.ChartObjects)xlSheet1.ChartObjects(Type.Missing);
//
int shift=0,shiftRow=0;
foreach(object obj in DatasForExcel)
{
// Adds a chart at x, y, 500 points wide and 300 tall.
Excel.ChartObject chartObj = charts.Add(0, shift*20, 300,
200);

Excel.Chart chart = chartObj.Chart;

DataForExcel DFE=(DataForExcel)obj;
int Innercount =0,ColumnCount=0;
if(DFE.AL.Count!=0)
{ArrayList alist=(ArrayList)DFE.AL[0];
ColumnCount=alist.Count;
}
Excel.Range chartRange = xlSheet1.get_Range(
xlSheet1.Cells[shiftRow+1,8],xlSheet1.Cells[shiftRow+DFE.AL.Count,8+ColumnCount-
1]);

chart.SetSourceData(chartRange,Type.Missing);
chart.ChartType = Excel.XlChartType.xlLine;
Excel.SeriesCollection seriesCollection=

```

```

        (Excel.SeriesCollection)chart.SeriesCollection(Type.Missing);
        Excel.Series series =
seriesCollection.Item(seriesCollection.Count);

        foreach(ArrayList arraylist in DFE.AL)
        {
            for(int
elemCount=0;elemCount<arraylist.Count;elemCount++)
            {

                xlSheet1.Cells[shiftRow+Innercount+1,8+elemCount]=((object)arraylist[elemCount
]).ToString().Replace(".",",");
            }
            Innercount++;
        }
        shift+=10;
        shiftRow+=16;
    }
    //
    // Gets the cells that define the bounds of the data to be.
    //Excel.Range chartRange = xlSheet1.get_Range( "G1","K3");

    /*Excel.SeriesCollection seriesCollection=

    (Excel.SeriesCollection)chart.SeriesCollection(Type.Missing);
    Excel.Series series =
seriesCollection.Item(seriesCollection.Count);*/
    }
    private void CellsChange(Excel.Range Target )
    { //This is called when any cell on a worksheet is changed.
        Debug.WriteLine("Delegate: You Changed Cells " +
            Target.get_Address( Missing.Value, Missing.Value,
Excel.XlReferenceStyle.xlA1,
            Missing.Value, Missing.Value ) + " on " +
Target.Worksheet.Name);
    }
    private void BeforeBookClose(Excel.Workbook Wb, ref bool Cancel )
    { //This is called when you choose to close the workbook in Excel.
        //The event handlers are removed, and then the workbook is
closed

        //without saving the changes.
        Wb.Saved = true;
        Debug.WriteLine("Delegate: Closing the workbook and
removing event handlers.");
    }

```

```

xlSheet1.Change -= EventDel_CellsChange;
xlApp.WorkbookBeforeClose -= EventDel_BeforeBookClose;
}

private void B_width_Click(object sender, System.EventArgs e)
{

}

private void DataForTitan_Click(object sender, System.EventArgs e)
{
    Titan=1;
    tBsigma02.Text="600,8";
    tBA.Text="502,44";
    tBn.Text="0,559";
    tBR.Text="2";
    tBSigma.Text="1,2365";
    //tBSigma.Text="0,86365";
    tBU.Text="-1,3375";
    tBq.Text="5";
    tBm_d.Text="0,827";
    //double rn=1149.5d/2d;
    double rn=1000d;
    tBrn.Text=rn.ToString();
    tBRpr.Text="40";
    tBRm.Text="40";
    tBs0.Text="3,5";
}

private void DataForAlumin_Click(object sender, System.EventArgs e)
{
    Titan=1;
    tBsigma02.Text="195,7";
    tBA.Text="277,24";
    tBn.Text="0,256";
    tBR.Text="0,6";
    tBSigma.Text="0,716";
    tBU.Text="-1,24";

    tBq.Text="5";
    tBm_d.Text="0,844";
    double rn=1000d;
    tBrn.Text=rn.ToString();
    tBRpr.Text="50";
    tBRm.Text="50";
    tBs0.Text="3,5";
}

```

```

    }
    private void rb_rn_1_CheckedChanged(object sender,
System.EventArgs e)
    {
        label10.Text="rn_1";
    }

    private void rb_rn_CheckedChanged(object sender, System.EventArgs
e)
    {
        label10.Text="rn";
    }

    private void rb_filenames_CheckedChanged(object sender,
System.EventArgs e)
    {
        textBox1.Text="TestRS.txt";
        textBox3.Text="TestPrPovr.txt";
        textBox2.Text="Test.txt";
    }

    private void rb_headers_CheckedChanged(object sender,
System.EventArgs e)
    {
        textBox1.Text="Распределение напряжений";
        textBox3.Text="Предельная повреждаемость";
        textBox2.Text="Одна итерация";
    }

    private void ExcelTitanForce(int pass)
    {

    }

    private void button4_Click(object sender, System.EventArgs e)
    {

    }

    private double PredPovrThisMDchangeAlum(double w_epred, double
Rm, double q, double mu, double R)
    {
        double rn_1=ParmsCurrent.rn/ParmsCurrent.md;
        tBrn.Text=rn_1.ToString();
        double rn=ParmsCurrent.rn;
        if(ExcelTitan.LimitDamaginPassCount==2)
        {

```

```
        ExcelTitan.rn_1=ParmsCurrent.rn;
    }
    tBrn.Text=rn.ToString();
    if(Rm>0d)
    {
        tBRm.Text=Rm.ToString();
        tBRpr.Text=Rm.ToString();
        if(ExcelTitan.LimitDamaginPassCount==2)
        {
            ExcelTitan.Rm=Rm;
            ExcelTitan.Rpr=Rm;
        }
    }
}
```